LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES
1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

6. Année 1938-1939
Calcul des variations

Frédéric Roger

Position du problème.– Équation d'Euler

Séminaire de mathématiques (1938-1939), Exposé 6-A, 11 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1938-1939__6__A_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 28 novembre 1938
Exposé 6-A, p. 1 à 11

POSITION DU PROBLÈME.– ÉQUATION D'EULER

par **Frédéric Roger**

Introduction

Donnons-nous[1][2] dans un plan une droite Δ, deux points A et B d'un même côté de Δ et proposons-nous de trouver dans ce plan, parmi les arcs de courbe d'extrémités A, B, celui dont la rotation autour de Δ engendre la surface de révolution d'aire la plus faible possible. Plaçons-nous en axes rectangulaires et prenons Δ pour Ox : l'aire est donnée par l'intégrale prise le long de l'arc : $\displaystyle\int_A^B 2\pi y\,ds$. En supposant cet arc représentable par une fonction uniforme $y(x)$, l'intégrale s'écrit :

$$\int_a^b 2\pi y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,dx$$

Elle est de la forme

$$I=\int_a^b f(x,y,y')\,dx$$

où les limites d'intégration a, b (abscisses des points A, B) sont données, ainsi que la fonction $f(x,y,y')$; l'inconnue, c'est la fonction $y(x)$ (dont y' est la dérivée) et il s'agit de la déterminer, sachant qu'elle prend des valeurs données pour a et b, de manière à rendre minima la valeur de l'intégrale I.

C'est à un problème de ce genre que conduit encore[3] la recherche du plus court chemin entre les points A, B ; également celle du chemin le plus rapide pour un point matériel pesant assujetti à le suivre sans frottement, quand on suppose le plan vertical 1/2
(problème de la brachistochrone). Si l'on veut s'assurer que la trajectoire reste bien dans ce plan vertical, il y a lieu d'introduire deux fonctions inconnues $y(x)$, $z(x)$, dans l'intégrale exprimant le temps de parcours. Et quand il s'agit de la surface, comme dans le problème de Plateau (déformation de la surface d'aire minima passant par un contour donné), c'est une intégrale double portant sur une fonction inconnue de deux variables $z(x,y)$, qu'il s'agit de rendre minima par un choix convenable de cette dernière fonction.[4]

Que l'intégrale soit simple ou multiple et porte sur une ou plusieurs variables, sa valeur dépend de toute façon de ces fonctions. Dans l'impossibilité de l'appeler une fonction de fonction, expression réservée à tout autre chose, nous l'appellerons avec M.VOLTERRA, une fonction de ligne ou de surface, plus simplement encore, avec M.HADAMARD, une fonctionnelle.[5] Et c'est à la recherche des extrema de certaines fonctionnelles que s'attaque le calcul des variations.

Dans cette recherche, au lieu de supposer fixes les extrémités de l'arc ou le contour de la surface, on peut considérer des limites variables dans certaines conditions (plus
2/3 court chemin entre deux courbes). On peut aussi imposer aux êtres géométriques cherchés de satisfaire à certaines conditions (se trouver sur une surface quant aux géodésiques de la surface), voire même de conserver une valeur donnée à certaines fonctionnelles (problèmes isopérimétriques, dont le nom vient du problème isopérimétrique proprement dit : recherche de la courbe fermée plane de périmètre donné, embrassant l'aire maxima).

I.– Développement des idées

Comme il arrive généralement aux branches de l'analyse dont les problèmes viennent de la physique mathématique, de la mécanique ou de la géométrie, le calcul des variations est loin de présenter dans son développement la continuité et l'harmonie des branches d'analyse pure. Il abonde en difficultés ; et chaque difficulté, une fois reconnue, a été le point de départ d'un nouvel essort [sic] de la théorie. Les idées directrices dans la recherche des extrema de fonctionnelles viennent des analogies, et plus souvent encore des divergences, avec la recherche des extrema des
3/4 fonctions ordinaire.

Méthode des variations de Lagrange. Son insuffisance. Méthode de Weierstrass. Reprenons l'intégrale :

$$I(y) = \int_a^b f(x, y, y')\, dx$$

et supposons que la fonction $y(x)$ acquérant en a et b des valeurs données, la rende minima. Soit $Y(x)$ une autre fonction de même valeur aux limites, en sorte que la différence $\eta(x) = Y(x) - y(x)$ s' annule. Relions l'une à l'autre les deux fonctions y et Y par la famille de fonctions $y + \alpha\eta$ dépendant linéairement du paramètre α ($\alpha = 0$ donne y, $\alpha = 1$ donne Y). Pour les fonctions de la famille, l'intégrale I devient une fonction ordinaire du paramètre numérique α

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')\, dx$$

La différence $I(\alpha) - I(0)$ admet généralement un développement de Taylor en α (au moins limité à un certain ordre n)

$$I(\alpha) - I(0) = \alpha I'(0) + \frac{\alpha^2}{2} I''(0) + \cdots + \frac{\alpha^n}{n!} \left[I^{(n)}(0) + \varepsilon(\alpha) \right]$$

Avec Lagrange, nous appellerons les termes successifs, variation première ∂I, variation seconde $\partial^2 I$, etc... de l'intégrale I correspondant à la variation de fonction $\partial y = \alpha\eta$. Que les conditions :

$$\partial I = 0 \qquad \partial^2 I \geqslant 0$$

soient nécessaires pour que $y(x)$ rende minima l'intégrale I résulte du fait que si elles 4/5
ne sont pas remplies, on peut trouver des valeurs de α suffisamment petites pour que $I(\alpha)$ soit moindre que $I(0)$.[6]

Que par contre les conditions

$$\partial I = 0 \qquad \partial^2 I > 0 \text{ (égalité exclue)}$$

ne soient pas suffisantes pour assurer l'existence d'un minimum absolu (comme nous le cherchions dans les problèmes de l'introduction) n'a rien d'étonnant puisqu'il en est déjà ainsi dans la question correspondante de calcul différentiel ordinaire. Mais on pourrait espérer que ces conditions soient suffisantes pour affirmer l'existence d'un minimum relatif (c'est-à-dire relativement à des fonctions $Y(x)$ dont la différence avec $y(x)$, soit $\eta(x)$, reste petite). C'est ce que croyait Lagrange, et à sa suite Legendre, Jacobi et Clebsch, qui ont développé les conditions sous lesquelles la variation seconde reste positive. Or il n'en est rien car une fonction $Y(x)$ voisine de $y(x)$ étant donnée, tout ce qu'on peut affirmer à partir de

$$I'(0) = 0, \quad I''(0) > 0 \qquad \text{c'est } I(\alpha) > I(0)$$

pour des valeurs de α suffisamment petites, mais non pas pour $\alpha = 1$ comme il le faudrait pour affirmer $I[Y] > I[y]$. On pourrait être tenté de croire que la difficulté n'est qu'artificielle ; elle est au contraire essentielle comme le montre l'exemple de 5/6
Scheeffer[7]

$$I = \int_{-a}^{+a} (x^2 y'^2 + x y'^3)\, dx$$

Pour $y(x) \equiv 0$,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{-a}^{+a} (x^2 \alpha^2 \eta'^2 + x \alpha^3 \eta'^3)\, dx \\ &= \alpha^2 \int_{-a}^{+a} x^2 \eta'^2\, dx + \alpha^3 \int_{-a}^{+a} x \eta'^3\, dx \end{aligned}$$

La variation première est nulle ; la variation seconde est positive (elle ne serait nulle que pour $\eta'(x) \equiv 0$: $\eta(x) \equiv \eta(a) = 0$, ce qui n'est pas). Néanmoins, en prenant pour $\eta(x)$:

$$\begin{aligned} 0 \text{ pour } & -a \leqslant x \leqslant -h \text{ et } h \leqslant x \leqslant a \\ +\varepsilon(x+h) \text{ pour } & -h \leqslant x \leqslant 0 \text{ et} \\ -\varepsilon(x+h) \text{ pour } & 0 \leqslant x \leqslant h \end{aligned}$$

le coefficient de α^3 est négatif et pour $h < \frac{3}{2}\varepsilon$, supérieur en valeur absolue à celui de α^2.

Dès lors, la seule considération des variations première et seconde est insuffisante pour trancher la question de l'existence d'un minimum même relatif ; et même relatif à un voisinage d'ordre 1, c'est-à-dire en astreignant à rester petit, non seulement $\eta(x)$ (voisinage d'ordre 0), mais encore $\eta'(x)$, car il en est ainsi dans l'exemple de Scheeffer. C'est cette insuffisance qui a conduit Weierstrass à une nouvelle condition, obtenue non plus en réduisant la différence $I[Y] - I[y]$ à son premier terme $\partial^2 I$ (∂I étant
6/7 préalablement annulé), mais en considérant la différence elle-même convenablement transformée comme on le verra dans la deuxième conférence.

Existence a priori de la solution : travaux de Hilbert, Lebesgue, Tonelli.–. La méthode des variations de Lagrange et celle de Weierstrass qui s'y greffe, partent de la considération de la solution du problème. Or il se peut qu'elle n'existe pas. Par exemple, de tous les arcs d'extrémités A, B tangents en ces points à deux demi-droites non portées par AB, il n'y en a pas de longueur minima. On peut bien en trouver dont la longueur s'approche de la distance AB et la configuration, du segment AB ; mais ce segment ne satisfait pas aux conditions tangentielles aux extrémités.

En réalité, la difficulté est d'une autre nature[8] car, parmi les arcs d'extrémité A, B passant par un troisième point C non situé sur AB, il en existe un de longueur minima : la ligne brisée ACB. Encore faut-il que l'on veuille bien admettre comme solution
7/8 une ligne présentant en C un point anguleux. De telles solutions (dites solutions discontinues, la discontinuité portant sur la dérivée première) ont été considérées systématiquement par M.Carathéodory dans sa thèse (Göttingen, 1904).

Même avec cet élargissement, un problème de calcul des variations n'admet pas toujours de solution. C'est là le point de départ des travaux de M.Hilbert, puis de M.Lebesgue sur l'intégrale de Dirichlet

$$\iint \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \right] dx\, dy$$

pour la détermination d'une fonction harmonique $u(x, y)$ prenant des valeurs données sur un contour donné. Dans cette question d'existence a priori de la solution, les difficultés sont de deux sortes.

D'une part, alors que les fonctions que l'on rencontre en physique mathématique, mécanique, ou géométrie, sont généralement continues, les fonctionnelles qui se présentent normalement ne sont que semi-continues, comme il résulte des travaux de

M.Tonelli. Considérons, par exemple, la longueur d'un arc de courbe Γ. On peut, tout en restant au voisinage de Γ, tracer un arc Γ_0 suffisamment sinueux pour que da longueur soit aussi grande que l'on veut. Par contre, on ne peut pas, au voisinage de Γ, tracer un arc de courbe Γ_0 beaucoup plus court que Γ.[9] On ne peut pas non 8/9
plus tracer un arc Γ_1 en correspondance biunivoque et bicontinue avec Γ, les éléments correspondants du premier ordre étant voisins (points peu écartés, tangentes peu inclinées l'une sur l'autre), sans que la longueur de Γ_1 soit voisine de celle de Γ. On exprime ces faits en disant que, relativement au voisinage du premier ordre, la longueur d'un arc de courbe est une fonctionnelle continue ; mais que relativement au voisinage d'ordre zéro, elle n'est que semi-continue inférieurement.[10] Ainsi, les deux notions de semi-continuité inférieure et supérieure en lesquelles, pour des recherches toutes théoriques, Baire a décomposé la notion de continuité (toute fonction à la fois semi-continue inférieurement et supérieurement étant continue et réciproquement) deviennent indispensables dans l'étude des fonctionnelles que l'on rencontre couramment.

D'autre part, alors que dans l'espace cartésien représentatif de l'argument d'une fonction ordinaire, toute suite infinie et bornée de points admet au moins un point limite, dans les familles de courbes ou surfaces arguments des fonctionnelles qui se présentent en calcul des variations, c'est une propriété importante mais non nécessaire de la famille que toute suite infinie et bornée d'éléments admette au moins un élément limite : famille compacte selon M.Fréchet. Par exemple, nous avons vu que n'était pas compacte la famille des arcs de courbe de demi-tangentes données en leurs extrémités. 9/10

Mais si l'on peut établir qu'une fonctionnelle est semi-continue inférieurement, et que la famille des arguments est compacte, alors on est sûr que la borne inférieure de la fonctionnelle est effectivement atteinte pour un argument de la famille. Ce théorème d'existence nous ramène au problème du minimum absolu envisagé d'un point de vue global, sans se préoccuper des conditions locales données par les méthodes de Lagrange, puis de Weierstrass.

Travaux de M.Marston MORSE. Avec les travaux de M.Morse, nous atteignons encore le point de vue global, mais en partant cette fois du point de vue local, au moyen de la topologie. D'autre part, guidé par l'analogie avec les fonctions ordinaires, M.Morse introduit, entre le minimum et le maximum, toute une échelle de types de valeurs stationnaires. Par exemple, sur la surface représentative d'une fonction ordinaire de deux variables, outre le minimum et le maximum, il y a le col (comme au sommet d'un paraboloïde hyperbolique) où les sections normales présentent tantôt un minimum, tantôt un maximum, le passage se faisant par les directions asymptotiques. Déjà, M.Birkhoff avec son « minimax principle » avait obtenu, en calcul des variations, le premier type après le minimum. C'est de là qu'est parti M.Morse pour une systématisation complète. 10/11

En résumé, entre les deux grands courants d'idées, point de vue analytique de Lagrange, Legendre, Jacobi, Weierstrass, et point de vue synthétique de Hilbert, Lebesgue, Tonelli, les travaux de M.Morse forment une synthèse et un considérable approfondissement.

II.– Variation première

Il y a donc lieu de reprendre la théorie dès le début ; et d'abord d'annuler la variation première.

Équation d'Euler. Considérant avec Lagrange la fonction du aprамètre α

$$I(\alpha) = \int_a^b f(x, y + \alpha\eta, y' + \alpha\eta')\, dx$$

nous devons exprimer $I'(0) = 0$. Or, d'après la règle de dérivation sous le signe $\int$

$$I'(0) = \int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\eta + \frac{\partial f}{\partial y'}\eta'\Big)\, dx$$

Dans l'élément différentiel figurent la fonction inconnue y et la dérivée y' : c'est précisément ce que nous voulons pour obtenir des conditions que y doit remplir. Ce qui gêne, c'est la fonction arbitraire η et sa dérivée η' et le succès de la méthode tient à ce qu'une intégration par parties permet de mettre l'une ou l'autre en facteur. Dans
11/12 le procédé classique, on opère sur le second terme $\dfrac{\partial f}{\partial y'}\, d\eta$, ce qui donne

$$I'(0) = \Big[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\Big]_a^b + \int_a^b \eta\Big(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\, dx$$

le terme tout intégré disparaît puisque $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Et si le coefficient de η dans l'élément différentiel n'était pas identiquement nul, pour une valeur x_0 de l'intervalle (a, b), il serait différent de zéro, soit positif ; comme nous le supposerons continu de manière à ne pas sortir de l'intégration des fonctions continues, il resterait positif dans un petit intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$. En choisissant η nul en dehors de ce dernier et positif sur lui, l'intégrale $I'(0)$ ne saurait être nulle. En sorte que la fonction inconnue y doit vérifier l'équation différentielle du second ordre

$$\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y'^2}y'' + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y'}y' + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

C'est l'équation d'Euler-Lagrange, dont les solutions seront appelées extrémales. En général, on pourra disposer les deux constantes d'intégration de manière à faire passer une extrémale par les deux points donnés A et B. Restera à voir si cette extrémale rend bien minima l'intégrale I.

Objection de Du Bois-Reymond. Pour obtenir l'équation d'Euler, nous avons fait implicitement un certain nombre d'hypothèses. D'abord, pour appliquer la règle de dérivation sous le signe $\int$, il faut que $f(x, y, y')$ soit assez régulière ; comme il suffit 12/13 que $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ existent et soient continues, la condition sera toujours réalisée dans les problèmes courants. Ensuite, dans l'intégration par parties, nous avons supposé l'existence et la continuité de $\dfrac{d}{dx}\dfrac{\partial f}{\partial y'}$; or, s'il est légitime de faire ces hypothèses sur y' puisqu'il figure sous le signe $\int$ dans la mise en équation du problème, il n'en est pas de même pour y''. C'est là l'objection de Du Bois-Reymond qu'il a levée de la manière suivante :

Au lieu d'intégrer par parties le second terme, on intègre le premier $\eta\, d\varphi$ où $\varphi(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}\, dx$, ce qui donne

$$I'(0) = [\eta\varphi]_a^b + \int_a^b \eta' \Big(\frac{\partial f}{\partial y'} - \varphi\Big)\, dx$$

Le terme tout intégré est encore nul à cause de $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Quant au coefficient $\Phi(x)$ de η', s'il n'était pas constamment égal à sa valeur moyenne C, définie par $\displaystyle\int_a^b [\Phi(x) - C]\, dx = 0$, on pourrait prendre

$$\eta(x) = \int_a^x [\Phi(x) - C]\, dx$$

car alors $\eta(a) = \eta(b) = 0$, et on aurait

$$I'(0) = \int_a^b (\Phi - C)\Phi\, dx = \int_a^b (\Phi - C)\Phi\, dx - \int_a^b (\Phi - C)\, dx = \int_a^b (\Phi - C)^2\, dx > 0$$

Par suite, la fonction inconnue y doit vérifier l'équation intégro-différentielle 13/14

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \int_a^x \frac{\partial f}{\partial y}\, dx + \ \mathrm{C^{te}}$$

Bien entendu, quand il est légitime d'en dériver le premier membre, elle est équivalente à l'équation d'Euler. En particulier, si $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y'^2}$ ne s'annule pas sur $y(x)$ dans l'intervalle (a, b) (on dit alors que le problème correspondant est régulier), à condition que les dérivées partielles de $\dfrac{\partial f}{\partial y'}$ existent et soient continues, la théorie des fonctions implicites permet d'affirmer l'existence et la continuité de y''. Mais il y a des problèmes très simples qui ne sont pas réguliers, en particulier, d'après ce qui vient d'être dit, les problèmes qui conduisent à des solutions discontinues.[11]

Extrémités variables. En supposant variables les extrémités A, B de l'arc d'intégration, si le minimum de l'intégrale I est obtenu sur un certain arc d'extrémités A_0, B_0, c'est en particulier le minimum relativement aux arcs d'extrémités fixées en

A_0, B_0. C'est donc parmi les extrémités que doit être cherchée la solution du problème. Comme elles dépendent en général de deux paramètres α, β, au moyen desquels on pourra exprimer aussi les coordonnées des extrémités A, B, l'intégrale I deviendra,
14/15 pour ces arcs d'extrémale, une fonction ordinaire des deux paramètres numériques

$$I(\alpha, \beta) = \int_{a(\alpha,\beta)}^{b(\alpha,\beta)} f\big[x, y(x, \alpha, \beta), y'(x, \alpha, \beta)\big]\, dx$$

Selon l'idée de la méthode des variations, nous nous proposons d'en annuler la différentielle première par rapport aux paramètres. Celle-ci s'écrit d'après la règle de différentiation d'une intégrale

$$\partial I = \big[f(x, y, y')\, \partial x\big]^b + \int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial y}\partial y + \frac{\partial f}{\partial y'}\partial y'\Big)\, dx$$

et se transforme par le procédé de Du Bois-Reymond en

$$\partial I = \big[f\partial x + \varphi\partial y\big]_a^b + \int_a^b \Big(\frac{\partial f}{\partial y'} - \varphi\Big)\, \partial y'\, dx.$$

Compte tenu du fait que $y(x, \alpha, \beta)$ est une extrémale, l'intégrale vaut $\big[C\, \partial y\big]_a^b$ et l'on a

$$\partial I = \Big[f\, \partial x + \frac{\partial f}{\partial y'}\, \partial y\Big]_a^b$$

Introduisons les paramètres directeurs de la tangente à la courbe lieu de A

$$dx = \partial a, \qquad dy = y'_x(a, \alpha, \beta)\, \partial a + \partial y;$$

de même pour B. Ce qui donne

$$\partial I = \Big[\Big(f - y'\frac{\partial f}{\partial y'}\Big)\, dx + \frac{\partial f}{\partial y'}\, dy\Big]_a^b$$

Le raisonnement déjà fait en fixant les deux extrémités peut être repris en n'en
15/16 fixant qu'une. Il est donc nécessaire qu'en A comme en B, on ait :

$$f - \frac{\partial f}{\partial y'}\Big(y' - \frac{dy}{dx}\Big) = 0$$

Cette relation entre les pentes y' de l'extrémale et $\dfrac{dy}{dx}$ du lieu de l'extrémité est dite relation de transversalité ; elle généralise celle d'orthogonalité à laquelle elle se réduit quand $f(x, y, y')$ est de la forme $g(x, y)\sqrt{1 + y'^2}$. En général, les deux relations de transversalité permettent de déterminer α et β. Restera ici encore à voir si l'arc rend bien minima l'intégrale.

Forme paramétrique. Jusqu'à présent, nous avons supposé les arcs représentables par des fonctions uniformes $y(x)$. Dans l'exemple de la surface de révolution minima, il est évident que si la demi-circonférence est rencontrée en plus d'un point par une perpendiculaire à l'axe, en réduisant au segment de perpendiculaire compris entre les points extrêmes la partie correspondante de méridienne, on obtiendra une surface moindre. Mais la nouvelle courbe, comprenant un segment parallèle à Oy, n'est pas davantage représentable par une fonction uniforme $y(x)$. D'où l'intérêt d'introduire systématiquement, comme l'a fait Weierstrass, une représentation paramétrique $x(t), y(t)$. L'inconvénient, c'est qu'un même arc est susceptible d'une infinité de telles représentations. 16/17

En particulier, nous voulons que la valeur de l'intégrale de la forme

$$I = \int_a^b f(x, y, x', y')\, dt$$

soit indépendante du choix de cette représentation. Soit donc $t = \varphi(\tau)$, avec $\varphi'(\tau) > 0$, la relation entre les deux paramètres variant dans le même sens. Exprimée avec le paramètre τ l'intégrale s'écrit

$$I = \int_\alpha^\beta f(x, y, x'_\tau, y'_\tau)\, d\tau$$

et devient, par le changement de variables $t = \varphi(\tau)$

$$I = \int_a^b f(x, y, x'_t\varphi', y'_t\varphi)\, \frac{dt}{\varphi'}$$

On doit donc avoir, quel que soit $\lambda > 0$,

$$f(x, y, \lambda x', \lambda y') = \lambda f(x, y, x', y')$$

ce qu'on exprime en disant que $f(x, y, x', y')$ doit être positivement homogène et de degré 1 par rapport aux variables x', y'. dans ces conditions, les deux équations intégro-différentielles

$$\frac{\partial f}{\partial x'} = \int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}\, dt + C, \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \int_a^t \frac{\partial f}{\partial y}\, dt + C'$$

auxquelles conduisent des développements calqués sur les précédents se ramènent l'une à l'autre.

Dans le problème de la surface de révolution minima 17/18

$$I = \int_A^B 2\pi y\, ds = \int_a^b 2\pi y\sqrt{x'^2 + y'^2}\, dt$$

la fonction f ne renferme pas x, en sorte que la première équation s'écrit fort simplement

$$\frac{yx'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} = C.$$

En introduisant l'angle polaire θ de la tangente à la courbe

$$y = \frac{C}{\cos\theta} \text{ qu'on peut poser } C \operatorname{ch}\varphi, \qquad dx = \frac{dy}{\operatorname{tg}\theta} = C\, d\varphi.$$

Les extrémales sont alors les chaînettes d'axe Δ

$$y = C \operatorname{ch} \frac{x - x_0}{C}$$

Sauf toutefois pour la valeur zéro de la constante C : on doit alors se déplacer perpendiculairement à l'axe ($x' = 0$) ou sur l'axe ($y = 0$). Et l'on constate en effet que si les points A et B sont relativement éloignés par rapport à leurs distances à Δ, le minimum de la surface est obtenu non pas pour la chaînette qui les joint, mais pour la ligne brisée $AA'B'B$, A' et B' désignant les projections orthogonales de A et B sur Δ.

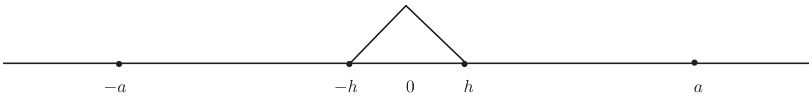
Ainsi apparaît sur un exemple simple l'intérêt des solutions discontinues et du procédé de Du Bois-Reymond qui permet de les atteindre. Par contre, pour les intégrales
18/19 multiples, alors que l'équation différentielle d'Euler devient une équation aux dérivées partielles, le procédé de Du Bois-Reymond n'est plus applicable. C'est là le point de départ des recherches de M.HAAR, principalement sur le problème de Plateau où la nature géométrique de la notion d'aire permet de considérer les intégrales au sens de M.Lebesgue.[12]

Notes

1. Cet exposé ne comporte aucune référence bibliographique. Son titre est aussi celui de [Had10, Livre I].
2. Comme son titre l'indique, cet exposé est une introduction au programme de l'année. Ainsi que les autres exposés donnés par Frédéric Roger, qui était le secrétaire, celui-ci a été relu en fin d'année et a fait l'objet d'un errata, qui a été relié en fin de volume dans l'exemplaire de l'IRMA (mais qui ne figure pas dans celui de l'IHP). Nous avons corrigé selon cet errata.
3. Après la surface de révolution minimale (la solution, caténoïde, engendrée par une chaînette, sera donnée à la fin de l'exposé), voici le problème de la brachistochrone (la solution est un arc de cycloïde). Hadamard commençait par la ligne droite.
4. Après les exemples les plus classiques en dimension 1 (l'inconnue est une courbe), Roger mentionne le problème classique en dimension 2, celui de Plateau. Il s'agit de déterminer une surface minimale s'appuyant sur un bord donné. Comme nous l'avons signalé à propos du séminaire Hadamard (page 19), Garnier et Douglas avaient obtenu, à la fin des années 1920, des solutions à ce problème (et pour ceci Jesse Douglas avait été récompensé, en 1936, par une des deux premières médailles « Fields »).
5. La terminologie d'Hadamard est restée.
6. La condition $\partial I = 0$ est l'équation d'Euler-Lagrange, étudiée dans la deuxième partie de l'exposé.
7. Roger a orthographié Scheffer le nom de Ludwig Scheeffer. Nous corrigeons. Cet exemple classique[1] est détaillé dans [Had10, p. 45]. Le graphe de la fonction est :

---

(1) L'article [Sch85] de Ludwig Scheeffer date de 1885.



8. Il existe une difficulté d'une autre nature.
9. Dans l'exemplaire de l'IRMA, la page 9 est manquante.
10. Déjà évoquée quelques lignes plus haut, la notion de voisinage d'ordre 0, ou d'ordre 1 (aujourd'hui $\mathcal{C}^0$, $\mathcal{C}^1$), est précisée au début de l'exposé 6-B.
11. Comme cela a déjà été signalé au début de la page 8, traditionnellement (voir aussi le début de l'exposé 6-F), on appelait « discontinues » des solutions continues mais pas dérivables, comme dans l'exemple de la surface de révolution d'aire minimale (voir la fin de l'exposé).
12. L'article de Haar sur le problème de Plateau est [Haa26].

Références

[Haa26] A. Haar – « Über das Plateausche Problem », *Math. Ann.* **97** (1926), p. 124–158.

[Had10] J. Hadamard – *Leçons sur le calcul des variations*, Librairie scientifique A. Hermann et Fils, Paris, 1910, recueillies par Maurice Fréchet.

[Sch85] L. Scheeffer – « Die Maxima und Minima des einfachen Integrale zwischen festen Grenzeen », *Math. Ann.* **25** (1885), p. 522–593.