

# LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par  
Michèle Audin

## 5. Année 1937-1938 *Fonctions algébriques*

Frédéric Roger

**Le principe de correspondance de Chasles-Cayley-Hurwitz**  
*Séminaire de mathématiques* (1937-1938), Exposé 5-I, 9 p.

<[http://books.cedram.org/MALSM/SMA\\_1937-1938\\_\\_5\\_\\_I\\_0.pdf](http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1937-1938__5__I_0.pdf)>



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## LE PRINCIPE DE CORRESPONDANCE DE CHASLES-CAYLEY-HURWITZ

par **Frédéric Roger**

### Introduction

À chaque<sup>[1]</sup> point  $x$  d'une droite, faisons correspondre algébriquement  $\alpha$  points  $y$  de cette droite, et supposons qu'inversement un même point  $y$  corresponde ainsi à  $\beta$  points  $x$ . Quand l'un des  $\alpha$  points  $y$  correspondant à  $x$  vient coïncider avec ce dernier, le point  $x = y$  est un point double de la correspondance. C'est le principe de Chasles que le nombre de ces points est  $\alpha + \beta$ . Exemple :  $\alpha = \beta = 1$ , la correspondance est homographique, elle admet  $\alpha + \beta = 2$  points doubles. Ce principe a été, par Chasles lui-même, étendu aux courbes unicursales.

Sur une courbe algébrique  $C$  de genre  $p$ , supposons la correspondance définie par une relation algébrique entre les coordonnées des points  $x$  et  $y$ .  $x$  étant fixé,  $y$  doit alors se trouver sur une courbe algébrique  $\Gamma_x$  dépendant de la position de  $x$ . Mais il peut se faire que  $\gamma$  des points d'intersection de  $\Gamma_x$  avec  $C$ , constamment confondus avec  $x$  lui-même (et non pas accidentellement, comme il arrive en un point double), ne doivent pas figurer parmi les  $\alpha$  points  $y$  correspondant à  $x$ . Dans ces conditions, le nombre des points doubles, donné indépendamment par Cayley et par Brill, est  $\alpha + \beta + 2p\gamma$ .

1/2

Exemple : prenons pour  $\Gamma_x$  la droite joignant  $x$  à un point fixe  $o$  situé en dehors de  $C$ .  $\Gamma_x$  coupe  $C$  en  $\gamma = 1$  point constamment confondu avec  $x$ , et  $\alpha = r - 1$  points  $y$  ( $n$  désignant le degré de  $C$ ). Inversement, un point  $y$  correspond à autant de points  $x$  qu'il y a de points de  $C$ , autres que  $y$ , sur la droite  $oy$ , soit  $\beta = n - 1$ . Quant aux points doubles, ce sont les points de contact des tangentes à  $C$  issues de  $o$ . Et la formule de Cayley-Brill donne pour classe  $c$  de  $C$ , en fonction du genre et du degré, l'expression connue par ailleurs.

Autre exemple : en prenant pour  $\Gamma_x$  la tangente en  $x$  à  $C$ , on trouve  $\gamma = 2$ ,  $\alpha = n - 2$ ,  $\beta = c - 2$ ; et la formule de Cayley-Brill donne alors le nombre des inflexions de  $C$ .

Dans cet exposé, nous allons, avec Hurwitz<sup>(1)[2]</sup>, sur une surface de Riemann de genre  $p$ , faire correspondre, à chaque point  $x$ , un nombre fini  $\alpha$  de points  $y : y', y'', \dots, y^\alpha$  dont nous supposons seulement les positions, fonctions analytiques de celle de  $x$ . Deux faits essentiels vont être mis en évidence : l'existence, en général, d'un nombre jouant le rôle de  $\gamma$  de la formule de Cayley-Brill, qui se compose par addition et multiplication comme les correspondances elles-mêmes ; la possibilité de définir une telle correspondance par une ou tout au plus deux relations algébriques entre les coordonnées des points  $x$  et  $y$ , même dans le cas des correspondances singulières où le nombre  $\gamma$  fait défaut.

3/4

**I. – Valence**

Les intégrales abéliennes de première espèce sur la surface de Riemann considérée (intégrales de fonctions algébriques sur la surface, qui n'admettent aucun point logarithmique ni polaire) sont fonctions linéaires de  $p$  d'entre elles qu'on peut choisir de manière que leurs périodes cycliques (quantités dont elles s'augmentent quand  $x$  décrit l'un des  $p$  premiers circuits ou l'un des  $p$  seconds circuits des  $p$  rétrosections qui rendent la surface simplement convexe [connexe], circuits auxquels se ramène, par déformation continue, tout chemin fermé tracé sur la surface) forment un tableau du type suivant :<sup>(2)</sup>

$$\begin{array}{l}
 u_1(x) : 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0, \quad a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1p} \\
 u_2(x) : 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0, \quad a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2p} \\
 \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 u_p(x) : 1 \quad 0 \quad \dots \quad 0, \quad a_{p1} \quad a_{p2} \quad \dots \quad a_{pp}
 \end{array}$$

où  $a_{ij} = a_{ji}$  ( $i, j = 1, 2, \dots, p$ ).

Chacune des  $p$  expressions  $u_k(y') + u_k(y'') + \dots + u_k(y^\alpha)$  ( $k = 1, 2, \dots, p$ ), considérée comme fonction analytique de  $x$ , reste finie quel que soit  $x$  puisqu'il en est ainsi de ses  $\alpha$  termes et ne peut, quand  $x$  décrit un chemin fermé, que s'augmenter d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes de  $u_k$  puisque les  $y', y'', \dots, y^\alpha$  ne peuvent que s'échanger entre eux. Sa dérivée par rapport à  $x$  est une fonction uniforme sans autres singularités possibles que des pôles : c'est une fonction algébrique sur la surface. Par suite, l'expression considérée est une intégrale abélienne de première espèce :

$$(1) \quad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \Pi_{ki} u_i(x) + \Pi_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

1. Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip (Math. Ann. 28, 1887, 561-585)

2. Cf. Jordan, Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique, t.2, ch.8.

où la sommation par rapport à l'indice  $i$  (ainsi que nous le convenons une fois pour toutes quand les limites ne sont pas précisées) doit être faite de 1 à  $p$ . Les  $\Pi$  sont des constantes : les  $\Pi_k$  dépendent des constantes d'intégration des  $u_i(x)$  et les  $\Pi_{ik}$  vérifient les relations suivantes : Quand  $x$  décrit le  $\ell^{\text{ième}}$  des  $p$  premiers circuits fondamentaux, le second membre de (1) s'augmente de  $\Pi_{k\ell}$  et le premier, d'une combinaison linéaire à coefficients entiers des périodes de  $u_k$  :

$$(2) \quad \Pi_{k\ell} = h_{k\ell} + \sum_i g_{i\ell} a_{ki} \quad (k, \ell = 1, 2, \dots, p)$$

De même, pour le  $\ell^{\text{ième}}$  des  $p$  seconds circuits fondamentaux :

5/6

$$(3) \quad \sum_i \Pi_{ki} a_{i\ell} = H_{k\ell} + \sum_j G_{j\ell} a_{kj} \quad (k, \ell = 1, 2, \dots, p)$$

Et l'élimination des  $\Pi_{ki}$  conduit à

$$(4) \quad \sum_i h_{ki} a_{i\ell} + \sum_{i,m} g_{mi} a_{km} a_{i\ell} = H_{k\ell} + \sum_j G_{j\ell} a_{kj} \quad (k, \ell = 1, 2, \dots, p)$$

Alors, de deux choses l'une, ou bien (et c'est le cas général), entre les secondes périodes cycliques  $a_{ij}$  des intégrales abéliennes de première espèce de la surface, de telles relations, où les  $h, g, G, H$  sont des nombres entiers, ne peuvent avoir lieu sans être des identités par rapport à ces périodes ; ou bien, la surface de Riemann est assez singulière pour que de telles relations puissent avoir lieu sans être des identités et de plus, la correspondance envisagée est assez singulière pour que les  $\Pi_{ki}$  conduisent précisément à ces relations.

**1.- Correspondances douées de valence.** Plaçons-nous d'abord dans le premier cas : l'absence de termes du second degré au second membre et de degré zéro dans le premier exige que le  $g$  et le  $H$  soient nuls quels qu'en soient les indices ; d'autre part, pour  $k \neq \ell$ , seul  $a_{k\ell}$  peut figurer dans les deux membres.

$$h_{ki} = 0 \text{ pour } i \neq k, \quad G_{j\ell} = 0 \text{ pour } j \neq \ell, \quad h_{kk} = G_{\ell\ell}.$$

En posant  $h_{11} = h_{22} = \dots = h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \dots = G_{pp} = \vartheta$  les relations (1) s'écrivent alors :

6/7

$$(5) \quad \sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \vartheta \cdot u_k(x) + \Pi_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

La suite nous apprendra que le nombre entier  $\vartheta$  ainsi mis en évidence n'est autre que l'opposé du  $\gamma$  de l'introduction. Dès à présent, la structure des équations (5) conduit à une propriété fondamentale de ce nombre.

Considérons, à côté de la correspondance  $C$ , qui au point  $x$ , fait correspondre les  $\alpha$  points  $y', y'', \dots, y^\alpha$ , une correspondance  $C'$  qui, au même point  $x$ , fasse correspondre  $\alpha'$  points  $y^{\alpha+1}, y^{\alpha+2}, \dots, y^{\alpha+\alpha'}$ . La correspondance  $C''$  qui, au point  $x$ , fait

correspondre les  $\alpha + \alpha'$  points  $y', y'', \dots, y^\alpha, y^{\alpha+1}, y^{\alpha+2}, \dots, y^{\alpha+\alpha'}$  sera dite la somme  $C + C'$  des deux premières. De (5) et de

$$\sum_{r'=1}^{r'=\alpha'} u_k(y^{r'}) = \vartheta' \cdot u_k(x) + \Pi'_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

résulte

$$\sum_{r''=1}^{r''=\alpha+\alpha'} u_k(y^{r''}) = (\vartheta + \vartheta') u_k(x) = (\Pi_k + \Pi'_k) \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

7/8 Par suite le nombre attaché à  $C'' = C + C'$  n'est autre que  $\vartheta'' = \vartheta + \vartheta'$ .

Maintenant, à la suite de la correspondance  $C$ , considérons une correspondance  $C'$  qui, à chaque point  $y^r$ , fasse correspondre  $\alpha'$  points  $(y^r)', (y^r)'', \dots, (y^r)^{\alpha'}$ . La correspondance  $C''$  qui, au point  $x$ , fait correspondre les  $\alpha\alpha'$  points  $y^{r''} = (y^r)^{r'}$  sera dite le produit  $C'C$  des deux premières. De (5) et de

$$\sum_{r'=1}^{r'=\alpha'} u_k[(y^r)^{r'}] = \vartheta' \cdot u_k(y^r) + \Pi'_k \quad (k = 1, 2, \dots, p, r = 1, 2, \dots, \alpha)$$

résulte

$$\sum_{r''=1}^{r''=\alpha\alpha'} u_k(y^{r''}) = \vartheta' [\vartheta \cdot u_k(x) + \Pi_k] + \alpha\Pi'_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

Par suite le nombre attaché à  $C'' = C'C$  n'est autre que  $\vartheta'' = \vartheta'\vartheta$ .

Ainsi, dans l'addition et la multiplication des correspondances non singulières, les nombres  $\vartheta$  qui leur sont attachés se composent comme elles. Ce nombre  $\vartheta$ , ou plutôt son opposé  $\gamma$  (de manière qu'il soit positif dans le cas élémentaire de l'introduction), sera dit la « valence » de la correspondance (« Werthigkeit » selon Brill, « Valenza » selon Severi).

8/9

**2. – Correspondances singulières.** Plaçons-nous maintenant sur une surface de Riemann singulière : il existe un système de nombres  $\Pi_{ki}$  vérifiant les relations (2) et (3) et conduisant à des relations (4) qui ne sont pas des identités par rapport aux  $a_{ij}$ . Les  $p$  relations

$$(6) \quad u_k(y') + u_k(y'') + \dots + u_k(y^p) = \sum_i \Pi_{ki} u_i(x) + \Pi_k \quad (k = 1, 2, \dots, p),$$

définissent  $y', y'', \dots, y^p$  comme  $p$  fonctions analytiques de  $x$ . Une telle correspondance ne pourrait être douée d'une valence  $\gamma$  sans que les seconds membres de (6) ne se réduisent à  $-\gamma u_k(x)$ ; mais alors les relations (4) seraient des identités par rapport aux  $a_{ij}$ , contrairement aux hypothèses faites. Ainsi, sur une surface de Riemann singulière, on peut définir au moins une correspondance singulière.

On peut même en définir bien d'autres par addition de correspondances régulières. Inversement d'ailleurs, étant donnée une correspondance singulière qui, à  $x$ , fait correspondre  $y', y'', \dots, y^\alpha$ , on a

$$\sum_{r=1}^{r=\alpha} u_k(y^r) = \sum_i \Pi_{ki} u_i(x) + \Pi_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

où les  $\Pi_{ki}$  conduisent à des relations (4) qui ne sont pas des identités. Considérons alors la correspondance singulière  $C'$  qui, à  $x$ , fait correspondre  $y^{\alpha+1}, y^{\alpha+2}, \dots, y^{\alpha+p}$  définie par les relations 9/10

$$\sum_{r'=1}^{r'=p} u_k(y^{\alpha+r'}) = -\gamma u_k(x) + \sum_i (-\Pi_{ki}) u_i(x) + \Pi'_k \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

Dès lors :

$$\sum_{r''=1}^{r''=\alpha+p} u_k(y^{r''}) = -\gamma u_k(x) + (\Pi_k + \Pi'_k) \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

La correspondance est alors douée de valence  $\gamma$ . Ainsi, toute correspondance singulière peut être envisagée comme une partie d'une correspondance non singulière.

10/11

## II.— Relations algébriques

Soit  $\theta(v_1, v_2, \dots, v_p)$  — symboliquement  $\theta(v_k)$  — la fonction introduite par Riemann dans l'inversion des intégrales abéliennes. Quand les arguments  $v_k$  s'augmentent de quantités de la forme  $h_k + \sum_{\ell} g_{\ell} a_{\ell k}$  où les  $h$  et les  $g$  sont des nombres entiers, la fonction  $\theta$  se reproduit multipliée par  $e^{-i\pi \sum_{\ell} g_{\ell} (2v_{\ell} + a_{\ell \ell})}$ . D'autre part, il est possible de choisir les constantes  $c_k$  de manière que  $\theta[u_k(y) - u_k(x) - c_k]$ , considérée comme fonction de la seule variable  $y$ , admette la racine  $y = x$  et  $p - 1$  autres indépendantes de  $y$ .

Grâce à ces propriétés, l'expression

$$\Pi(x, y) = \sum_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\theta[u_k(y) - u_k(y^r) - c_k]}{\theta[u_k(y) - u_k(y_0^r) - c_k] \cdot \theta[u_k(y_0) - u_k(y^r) - c_k]}$$

où les  $y^r$  désignent les correspondants de  $x$ , les  $y_0^r$  ceux d'un point fixe  $x_0$  et  $y_0$  un autre point fixe, considérée comme fonction de  $y$  seul, n'admet pour racines que les  $\alpha$  points  $y_0^r$ . Comme fonction de  $x$ , elle s'annule quand l'un des  $y^r$  devient égal à  $y$  et devient infinie quand l'un des  $y^r$  devient égal à  $y_0$ . Or les points  $x$  auxquels correspond un point  $y$  donné ne peuvent être qu'en nombre fini  $\beta$ , car s'il existait un point  $\eta$  correspondant à une infinité de points  $x$ , ceux-ci auraient un point d'accumulation  $\xi$  11/12

sur la surface et la fonction analytique  $y(x) - \eta$  admettrait  $\xi$  comme racine non isolée, ce qui n'est pas possible.

Supposons d'abord la correspondance douée de la valence  $\gamma$  et considérons le produit

$$F(x, y) = \left\{ \frac{\theta[u_k(y) - u_k(x) - c_k]}{\theta[u_k(y) - u_k(x_0) - c_k] \cdot \theta[u_k(y_0) - u_k(x) - c_k]} \right\}^\gamma \cdot \Pi(x, y).$$

Outre les racines et pôles de  $\Pi$ , il admet à l'ordre  $\gamma$  en  $y$ , la racine  $y = x$  et le pôle  $y = x_0$ ; en  $x$ , la racine  $x = y$  et le pôle  $x = y_0$  (racines et pôles à permuter si  $\gamma < 0$ ). Compte tenu des relations (5) (où  $\vartheta = -\gamma$ ),  $F(x, y)$  ne change pas quand  $y$  décrit un chemin fermé. Quand c'est  $x$ , il se reproduit multiplié par  $e^{2i\pi \sum_\ell M_\ell [u_\ell(y) - u_\ell(y_0)]}$ . Si les nombres entiers  $M_\ell$  n'étaient pas tous nuls, en faisant décrire ensuite à  $y$  le  $\ell^{\text{ième}}$  des  $p$  premiers circuits fondamentaux, on ne retrouverait pas le même résultat qu'en intervertissant les deux opérations. Concluons donc que  $F(x, y)$ , soit comme fonction de  $x$ , soit comme fonction de  $y$ , uniforme et sans autre singularité que des pôles, est <sup>12/13</sup> algébrique sur la surface.

Dans le cas où  $\gamma$  est positif, nous voyons que  $F(x, y) = 0$ , où  $x$  est fixé, définit en  $y$ , comme dans l'introduction, les  $\alpha$  correspondants de  $x$  et  $\gamma$  fois  $x$  lui-même. Précisons la nature de cette relation. Considérée comme fonction de  $y$ ,  $F(x, y)$  n'admet pour pôles que chacun des  $y_0^i$  simples et  $x_0$  d'ordre  $\gamma$ . Or il n'existe qu'un nombre fini de fonctions algébriques sur la surface et admettant ces pôles qui soient linéairement indépendantes : c'est ce nombre que donne le théorème de Riemann-Roch. Ce qui nous importe est qu'il soit fini : on peut alors trouver  $q + 1$  fonctions algébriques de  $y$ ,  $f_0(y), f_1(y), \dots, f_q(y)$  en fonction linéaire desquelles s'exprime  $F(x, y)$ . Les coefficients, constantes par rapport à  $y$ , sont des fonctions de  $x$ , algébriques comme on s'en assure en résolvant, par rapport à elles, les équations linéaires que l'on obtient en donnant à  $y$   $q + 1$  valeurs particulières de manière à ne pas annuler le déterminant d'ordre  $q + 1$ . En sorte que l'on a

$$F(x, y) = \varphi_0(x)f_0(y) + \varphi_1(x)f_1(y) + \dots + \varphi_q(x)f_q(y)$$

En passant à la représentation des points  $x$  en coordonnées homogènes  $x_1, x_2, x_3$ , entre les deux fonctions algébriques  $\xi_1 = \frac{x_1}{x_3}$  et  $\xi_2 = \frac{x_2}{x_3}$  existe une relation algébrique :  $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ ,  $f$  désignant un polynôme homogène en  $x_1, x_2, x_3$ . D'autre part, les <sup>13/14</sup> fonctions algébriques  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_q(x)$  s'expriment rationnellement en fonction de  $\xi_1, \xi_2$ , ainsi que  $f_0(y), f_1(y), \dots, f_q(y)$  en fonction de  $\eta_1 = \frac{y_1}{y_3}, \eta_2 = \frac{y_2}{y_3}$ . De sorte que la relation  $F(x, y) = 0$  s'écrit  $\psi(x_1, x_2, x_3/y_1, y_2, y_3) = 0$ ,  $\psi$  désignant un polynôme homogène séparément en  $x_1, x_2, x_3$  et  $y_1, y_2, y_3$ . Ainsi toute correspondance de valence positive peut s'obtenir au moyen d'une seule relation algébrique.

Quand la valence  $\gamma$  est négative, on peut ajouter à la correspondance  $C$  une correspondance  $C'$  de  $\gamma' > -\gamma$  afin que la somme  $C'' = C + C'$  ait sa valence  $\gamma + \gamma'$  positive.

Ce qui conduit à définir  $C$  par le quotient des deux relations algébriques définissant respectivement  $C''$  et  $C'$ . Mais il peut être plus commode de considérer  $C$  comme la partie commune à deux correspondances  $C''_1$  et  $C''_2$  obtenues en ajoutant séparément à  $C$  deux correspondances  $C'_1$  et  $C'_2$  sans éléments communs et telles que  $\gamma'_1 > -\gamma$ ,  $\gamma'_2 > -\gamma$ . Dans ces conditions, la correspondance  $C$  sera définie par l'ensemble des deux relations algébriques définissant  $C''_1$  et  $C''_2$ .

Ce dernier procédé s'applique tout aussi bien à une correspondance singulière, puisqu'on sait lui ajouter séparément deux correspondances sans éléments communs de manière que les sommes obtenues soient des correspondances douées d'une valence positive. Ainsi toute correspondance du type envisagé par Hurwitz, qu'elle soit ou non singulière, peut être définie par au plus deux relations algébriques; une seule quand la correspondance est de valence positive, ce qui ramène au cas séparément envisagé par Cayley et par Brill. 14/15

15/16

### III.— Points doubles

Reprenons l'expression

$$\Pi(x, y) = \sum_{r=1}^{r=\alpha} \frac{\theta[u_k(y) - u_k(y^r) - c_k]}{\theta[u_k(y) - u_k(y_0^r) - c_k] \cdot \theta[u_k(y_0) - u_k(y^r) - c_k]}$$

dont les racines en  $y$  sont les  $\alpha$  points  $y^r$  correspondant à  $x$ . Quand on y fait  $y = x$ , les racines sont alors les points doubles de la correspondance.

Envisageant d'abord le cas d'une correspondance de valence  $\gamma$ , ceci nous conduit à considérer l'expression

$$F(x) = \left[ \frac{F(x, y)}{\{\theta[u_k(y) - u_k(x) - c_k]\}^\gamma} \right]_{y=x}$$

construite de manière à reprendre la même valeur quand  $y = x$  décrit un chemin fermé. C'est donc une fonction algébrique de  $x$  : les racines sont en même nombre que ses pôles. Parmi ces derniers figurent les  $\alpha$  points  $y_0^r$  et les  $\beta$  points  $x$  pour lesquels l'un des  $y^r$  vient en  $y_0$ . Quant aux  $2p$  racines de  $\theta[u_k(x) - u_k(x_0) - c_k] \cdot \theta[u_k(y_0) - u_k(x) - c_k]$  elles comptent pour  $2p\gamma$  pôles ou racines suivant que  $\gamma$  est positif ou négatif. Dans tous les deux cas, le nombre des points doubles de la correspondance est  $\alpha + \beta + 2p\gamma$  : c'est la formule de Cayley-Brill, mais valable encore pour  $\gamma > 0$ . 16/17

Quand la correspondance est singulière, il faut évaluer autrement le nombre des racines de  $\Pi(x) = [\Pi(x, y)]_{y=x}$ . Voici un procédé valable pour toute correspondance (singulière ou non) et conduisant à une formule tout à fait générale. La fonction  $\Pi(x)$



n'est pas uniforme sur la surface, mais elle le devient quand on coupe la surface aux  $p$  rétrosections canoniques ; en sorte que l'intégrale

$$\frac{1}{2i\pi} \int d \log \Pi(x)$$

prise le long de ces rétrosections est égale à la différence entre le nombre des racines et celui des pôles. Ce dernier valant  $\alpha + \beta$ , on obtient, compte tenu des relations (1), (2) et (3), pour nombre des points doubles<sup>[3]</sup>

$$\alpha + \beta - (h_{11} + h_{22} + \cdots + h_{pp} + G_{11} + G_{22} + \cdots + G_{pp})$$

Pour une correspondance de valence  $\gamma$ , comme

$$h_{11} = h_{22} = \cdots = h_{pp} = G_{11} = G_{22} = \cdots = G_{pp} = -\gamma,$$

on retrouve bien le nombre  $\alpha + \beta + 2p\gamma$  précédemment donné.

Comme application du principe de correspondance de Chasles-Cayley-Hurwitz donnant le nombre des points doubles, proposons-nous de trouver le nombre des couples communs à deux correspondances. Afin de ne pas compliquer les notations, plaçons-nous dans le cas de deux correspondances  $C$  et  $C'$  de valences respectives  $\gamma$  et  $\gamma'$ .  $C$  fait correspondre à un point  $x$ ,  $\alpha$  points  $y$  et un point  $y$  correspond à  $\beta$  points  $x$ ; de même,  $C'$  fait correspondre à un point  $x'$ ,  $\alpha'$  points  $y'$  et un point  $y'$  correspond à  $\beta'$  points  $x'$ . Identifions  $y$  et  $y'$  et considérons la correspondance ainsi définie entre  $x$  et  $x'$  : les couples communs à  $C$  et  $C'$  proviendront des points doubles de cette correspondance. À un point  $x$  correspondent  $\alpha'' = \alpha\beta'$  points  $x'$  et un point  $x'$  correspond à  $\beta'' = \beta\alpha'$  points  $x$ ; quant à la valence de cette correspondance produit, elle est donnée par  $-\gamma'' = (-\gamma) \cdot (-\gamma')$ . Et le nombre cherché est

$$\alpha'' + \beta'' + 2p\gamma'' = \alpha\beta' + \beta\alpha' - 2p\gamma\gamma'.$$

---

### Notes

1. Il n'y a pas de bibliographie pour cet exposé. Le seul article cité est celui [Hur87] de Hurwitz sur les correspondances. Le cours d'analyse de Jordan [Jor93] est aussi invoqué. Les références à Cayley [Cay66] et Brill [Bri73, Bri74] se trouvent dans l'article de Hurwitz, dont l'exposé est fortement inspiré. Le principe de correspondance de Chasles, dont la première apparition remonte au moins à 1855 (dans [Cha55]) est à l'origine d'innombrables théorèmes énumératifs, de Chasles (voir [Aud11]) ou d'autres, par exemple, la note de Cayley [Cay66] citée par Hurwitz suit immédiatement, dans les *Comptes rendus*, une nouvelle note de Chasles sur ce sujet.

2. Comme toujours, les notes infrapaginales sont dues à l'auteur de l'exposé.

3. Le nombre de points fixes de la correspondance est ainsi donné par la trace d'une matrice. C'est un résultat de même nature que le théorème de Lefschetz (voir [Lef30] et l'exposé 3-H

du séminaire), à la source duquel il se trouve peut-être, et, bien sûr, que le lemme important de la note [Wei40] d'André Weil de 1940.

### Références

- [Aud11] M. AUDIN – *Mai quai Conti*, 2011, <http://oulipo.net/fr/mai-quai-conti>.
- [Bri73] A. V. BRILL – « Ueber Entsprechen von Punktsystemen auf einer Curve », *Math. Ann.* **6** (1873), p. 33–65.
- [Bri74] ———, « Ueber die Correspondenzformel », *Math. Ann.* **7** (1874), p. 607–622.
- [Cay66] A. CAYLEY – « Note sur la correspondance de deux points sur une courbe », *C. R. Acad. Sci. Paris* **62** (1866), p. 586–590.
- [Cha55] M. CHASLES – « Erratum : “Minima of the action integral and relative equilibria of  $n$  bodies” », *C. R. Acad. Sci. Paris* **41** (1855), p. 1097–1107.
- [Hur87] A. HURWITZ – « Ueber algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip », *Math. Ann.* **28** (1887), p. 561–585.
- [Jor93] C. JORDAN – *Analyse*, Cours de l'École polytechnique, 1893, Deuxième édition.
- [Lef30] S. LEFSCHETZ – *Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 12, American Mathematical Society, New York, 1930.
- [Wei40] A. WEIL – « Sur les fonctions algébriques à corps de constantes fini », *C. R. Acad. Sci. Paris* **210** (1940), p. 592–594.