

# LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par  
Michèle Audin


## 4. Année 1936-1937 *Travaux d'Élie Cartan*

Élie Cartan

### Les problèmes d'équivalence

*Séminaire de mathématiques* (1936-1937), Exposé 4-D, 20 p.

<[http://books.cedram.org/MALSM/SMA\\_1936-1937\\_\\_4\\_\\_D\\_0.pdf](http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1936-1937__4__D_0.pdf)>

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## LES PROBLÈMES D'ÉQUIVALENCE

par **Élie Cartan**

Le problème<sup>[1][2]</sup> dont je vais m'occuper, est, sous sa forme la plus générale, la recherche des conditions d'équivalence de deux systèmes de formes différentielles, ou d'équations différentielles ou aux dérivées partielles, par rapport à un groupe de transformations continues au sens de Lie. Mais ce n'est pas sous cette forme générale que nous le considérerons, parce que nous ne sommes pas encore en possession d'une théorie générale des groupes continus, cette théorie trouvant précisément son origine dans la théorie d'équivalence, en apparence restreinte, que nous allons exposer. Elle s'appuie sur la théorie des systèmes de Pfaff en involution ; d'autre part, elle est à la base de la géométrie différentielle générale (méthode du repère mobile), de la théorie des espaces généralisés et d'une théorie d'intégration de certains systèmes différentiels qui admettent des caractéristiques de Cauchy. Il est bien entendu que les données seront toujours supposées analytiques, bien que les méthodes et les résultats gardent souvent leur validité sous des hypothèses moins restreintes.

1/2

Tout problème d'équivalence ressortit à l'Analyse, mais comporte préalablement un problème d'Algèbre, qui est souvent d'une nature triviale, mais qu'il est important de mettre en évidence. Par exemple, deux formes différentielles au même nombre  $n$  de variables, la première construite avec les variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et leurs différentielles, la seconde construite avec les variables  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n$  et leurs différentielles, ne pourront être équivalents, c'est-à-dire transformables l'une dans l'autre, par une transformation analytique faisant passer des variables  $x_i$  aux variables  $\bar{x}_i$ , que si en deux points correspondants  $(x, \bar{x})$  les deux formes, considérées comme formes algébriques en  $dx_i$  et  $d\bar{x}_i$ , sont algébriquement équivalentes, c'est-à-dire transformables l'une dans l'autre par une substitution linéaire faisant passer des  $dx_i$  aux  $d\bar{x}_i$ . S'il s'agit de deux formes différentielles quadratiques et que l'une soit décomposable en une somme de  $p < n$  carrés indépendants, il faudra qu'il en soit de même pour l'autre. S'il s'agit de deux formes différentielles cubiques, (non extérieures) à trois variables, ces formes égalées à zéro peuvent être interprétées, quand on y regarde les différentielles comme des coordonnées homogènes d'un point dans un plan, comme définissant deux cubiques, l'équivalence des formes exigera qu'on puisse passer d'une cubique à

2/3 l'autre par une substitution linéaire sur les coordonnées, d'où égalité des invariants projectifs de ces deux cubiques. Restons dans le cas général; d'après un théorème classique les deux formes cubiques  $F$  et  $\bar{F}$  pourront être écrites

$$\begin{aligned} F &= \omega_1^3 + \omega_2^3 + \omega_3^3 - 6k \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ \bar{F} &= \bar{\omega}_1^3 + \bar{\omega}_2^3 + \bar{\omega}_3^3 - 6\bar{k} \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_2 \bar{\omega}_3 \end{aligned}$$

ou [sic]  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  sont trois expressions de Pfaff linéairement indépendantes en  $dx_1, dx_2, dx_3$ , et de même pour  $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \bar{\omega}_3$ . Les formes canoniques ainsi obtenues peuvent être écrites d'un nombre fini de manières. L'équivalence des deux formes exigera la compatibilité de l'un au moins d'un nombre fini de systèmes de la forme

$$(1) \quad \bar{k} = k, \quad \bar{\omega}_1 = \omega_1, \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2, \quad \bar{\omega}_3 = \omega_3$$

correspondant aux différentes manières (en nombre fini) d'identifier algébriquement les formes  $F$  et  $\bar{F}$ .

Revenons au cas de deux formes différentielles quadratiques à  $n$  variables et supposons-les définies positives. Chacune peut être ramenée à une somme de  $n$  carrés indépendants

$$\begin{aligned} F &\equiv \omega_1^2 + \omega_2^2 + \dots + \omega_n^2 \\ \bar{F} &\equiv \bar{\omega}_1^2 + \bar{\omega}_2^2 + \dots + \bar{\omega}_n^2 \end{aligned}$$

Ici l'identification algébrique des deux formes est possible d'une infinité de manières, on passe des  $\omega_i$  à  $\bar{\omega}_i$  par une substitution linéaire orthogonale. La condition d'équivalence des deux formes, au sens du problème qui nous intéresse est donc ici la condition de compatibilité de système de Pfaff obtenu en exprimant que les  $\bar{\omega}_i$  se déduisent des  $\omega_i$  par une substitution linéaire orthogonale (à coefficients a priori quelconques). Mais il est préférable de conserver la symétrie entre les deux formes  $F$  et  $\bar{F}$  d'introduire les formes  $\omega_i^*$  qui se déduisent des  $\omega_i$  par une substitution orthogonale arbitraire (ce qui fait apparaître dans les coefficients des  $\omega_i$   $\frac{n(n-1)}{2}$  paramètres ou variables auxiliaires  $u_1, u_2, \dots, u_{\frac{n(n-1)}{2}}$ ), d'introduire de même les formes  $\bar{\omega}_i^*$  avec dans les coefficients  $\frac{n(n-1)}{2}$  autres variables auxiliaires  $\bar{u}_i$ .

*La condition d'équivalence n'est alors autre que la condition de compatibilité des équations de Pfaff*

$$(2) \quad \bar{\omega}_i^* = \omega_i^*;$$

4/5 mais à la différence de ces formes cubiques où n'intervenaient que les variables données, il intervient ici des variables auxiliaires.

On conçoit que dans tous les problèmes d'équivalence algébrique, on arrive à des résultats analogues, la transformation linéaire de variables qui réalise l'équivalence se réalise, grâce à un choix préalable convenable des variables, par les substitutions linéaires d'un groupe qui peut ne contenir qu'un nombre fini d'opérations ou en contenir

une infinité. Le problème d'Analyse correspondant conduira à des systèmes analogues à (1) et (2) avec ou non introduction de variables auxiliaires.

Un exemple se rapportant à l'équivalence d'équations différentielles ne sera pas inutile. Considérons deux équations différentielles du second ordre

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right), \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{x}^2} = \bar{F}\left(\bar{x}, \bar{y}, \frac{d\bar{y}}{d\bar{x}}\right)$$

Chacune d'elles peut être ramenée à un système de Pfaff, à savoir

$$(A) \quad \omega_1 = dy - y' dx = 0 \quad \omega_2 = dy' - F(x, y, y') dx = 0$$

$$(\bar{A}) \quad \bar{\omega}_1 = d\bar{y} - \bar{y}' d\bar{x} = 0 \quad \bar{\omega}_2 = d\bar{y}' - \bar{F}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}') d\bar{x} = 0$$

Chacun de ces systèmes, au point de vue algébrique, est un système de deux équations linéaires et homogènes à trois variables ; à ce point de vue, deux systèmes (A) et ( $\bar{A}$ ) sont toujours algébriquement équivalents, et cette équivalence algébrique se réalise par les relations : 5/6

$$\bar{\omega}_1 = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2$$

$$\bar{\omega}_2 = \alpha'\omega_1 + \beta'\omega_2$$

auxquelles il faut ajouter

$$d\bar{x} = \alpha''\omega_1 + \beta''\omega_2 + \gamma'' dx.$$

Plus symétriquement, on posera

$$\omega_1^* = u\omega_1 + v\omega_2, \quad \omega_2^* = u'\omega_1 + v'\omega_2, \quad \omega_3^* = w dx + \lambda dy + \mu dy'$$

$$\bar{\omega}_1^* = \bar{u}\bar{\omega}_1 + \bar{v}\bar{\omega}_2, \quad \bar{\omega}_2^* = \bar{u}'\bar{\omega}_1 + \bar{v}'\bar{\omega}_2, \quad \bar{\omega}_3^* = \bar{w} d\bar{x} + \bar{\lambda} d\bar{y} + \bar{\mu} d\bar{y}'$$

avec sept variables auxiliaires pour chacun des systèmes, et l'équivalence se réalisera par l'égalité chacune à chacune des formes  $\omega_i^*$  et  $\bar{\omega}_i^*$

$$(4) \quad \bar{\omega}_1^* = \omega_1^*, \quad \bar{\omega}_2^* = \omega_2^*, \quad \bar{\omega}_3^* = \omega_3^*$$

Mais il ne faut pas perdre de vue notre problème initial. La compatibilité du système (4) signifie qu'on peut effectuer une transformation des variables  $x, y, y'$  dans les variables  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$ , transformant (A) en ( $\bar{A}$ ) : en effet, les équations (4) donnent résolues,  $d\bar{x}, d\bar{y}, d\bar{y}'$  comme combinaisons linéaires des  $dx, dy, dy'$ , et par suite entraînent la propriété de  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{y}'$  d'être des fonctions de  $x, y, y'$ . Mais on peut se proposer un problème d'équivalence tout à fait différent, *par exemple* se demander à quelles conditions on peut passer de la première équation différentielle (3) à la seconde, par une transformation  $(x, y \rightarrow \bar{x}, \bar{y})$ . 6/7 Natuellement l'introduction de la variable auxiliaire  $y'$  pour passer de l'équation différentielle à un système de Pfaff fait perdre de vue ce problème initial. Pour le retrouver, *il suffit de limiter les substitutions linéaires considérées dans la partie purement algébrique du problème, à celles pour lesquelles  $d\bar{x}, d\bar{y}$ , s'expriment*

linéairement en  $dx$ ,  $dy$ , et en même temps  $\bar{\omega}_1$  et  $\bar{\omega}_2$  s'expriment linéairement en  $\omega_1$  et  $\omega_2$ . Il en résulte

$$\begin{aligned} d\bar{y} - \bar{y}' d\bar{x} &= \alpha(dy - y' dx) \\ d\bar{y}' - \bar{F} d\bar{x} &= \alpha'(dy - y' dx) + \beta'(dy' - F dx) \\ d\bar{x} &= \alpha'' dx + \beta''(dy - y' dx); \end{aligned}$$

en posant cette fois :

$$\begin{aligned} \omega_1^* &= u(dy - y' dx) \\ \omega_2^* &= u'(dy - y' dx) + v'(dy' - F dx) \\ \omega_3^* &= u'' dx + v'' dy \end{aligned}$$

et définissant les  $\bar{\omega}_i^*$  d'une manière analogue, les conditions d'équivalence sont les conditions de compatibilité du système

$$\bar{\omega}_1^* = \omega_1^*, \quad \bar{\omega}_2^* = \omega_2^*, \quad \bar{\omega}_3^* = \omega_3^*$$

7/8 où n'interviennent dans les seconds membres que trois variables auxiliaires  $u, u', v', u'', v''$ , au lieu de 7.

On pourrait aussi se proposer le problème d'équivalence des équations différentielles données par rapport au groupe des transformations de contact du plan, ce qui exigerait simplement que l'équation  $dy - y' dx = 0$  se transformât en  $d\bar{y} - \bar{y}' d\bar{x} = 0$ . Il n'y aurait qu'à prendre les mêmes formes  $\omega_i^*$  que dans le problème précédent, mais  $\omega_3^*$  ayant la forme plus générale

$$\omega_3^* = u'' dx + v'' dy + w'' dy'$$

Notons ici la remarque fondamentale que le groupe des transformations ponctuelles à deux variables  $x, y$  a été utilisé par sa propriété caractéristique que  $d\bar{x}, d\bar{y}$  sont des combinaisons linéaires de  $dx, dy$ , ce qui veut encore dire que *ce groupe est constitué par l'ensemble des transformations qui laissent invariantes deux expressions de Pfaff*  $u dx + v dy, u' dx + v' dy$ , où interviennent 4 variables auxiliaires,  $u, v, u', v'$ . Le groupe des transformations conformes du plan, qui reproduit  $dx^2 + dy^2$  à un facteur fini près, est de même celui qui effectue sur  $dx, dy$  la substitution linéaire

$$\begin{aligned} d\bar{x} &= u dx - v dy \\ d\bar{y} &= v dx + u dy \end{aligned}$$

8/9 ou encore, *qui laisse invariantes les deux formes*  $u dx - v dy, v dx + u dy$ .

On conçoit que *tout problème d'équivalence par rapport à un groupe qui peut se définir par l'invariance d'un système de formes de Pfaff sera lui-même susceptible d'être ramené à un problème de compatibilité d'un système de Pfaff*  $\bar{\omega}_i = \omega_i$ , analogue à ceux que nous avons trouvés jusqu'à présent.

Indiquons un dernier exemple qui est à l'origine de la géométrie finslérienne. Cherchons les conditions d'équivalence de deux intégrales  $\int F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) dx$  et

$\int \overline{F}(\overline{x}, \overline{y}, \frac{d\overline{y}}{d\overline{x}}) d\overline{x}$  par rapport au groupe des transformations de contact du plan. En introduisant les variables  $y'$  et  $\overline{y}'$ , il ne suffit pas d'exprimer qu'on peut par une transformation de contact changer la forme  $F dx$  dans la forme  $\overline{F} d\overline{x}$ , car on suppose que dans l'intégration des formes on ait constamment  $dy - y' dx = 0$  et  $d\overline{y} - \overline{y}' d\overline{x} = 0$ . En réalité il faut donc exprimer la congruence

$$\overline{F} d\overline{x} = F dx \pmod{dy - y' dx, d\overline{y} - \overline{y}' d\overline{x}}$$

ce qui revient à

$$\overline{F} d\overline{x} + \overline{\alpha}(d\overline{y} - \overline{y}' d\overline{x}) = F dx + \alpha(dy - y' dx)$$

On sera ainsi conduit à introduire les formes

9/10

$$\begin{aligned} \omega_1 &= F dx + u(dy - y' dx) & \omega_2 &= v(dy - y' dx) & \omega_3 &= w dy' + \lambda dx + \mu dy \\ \overline{\omega}_1 &= \overline{F} d\overline{x} + \overline{u}(d\overline{y} - \overline{y}' d\overline{x}) & \overline{\omega}_2 &= \overline{v}(d\overline{y} - \overline{y}' d\overline{x}) & \overline{\omega}_3 &= \overline{w} d\overline{y}' + \overline{\lambda} d\overline{x} + \overline{\mu} d\overline{y} \end{aligned}$$

avec  $\overline{\omega}_1 = \omega_1, \overline{\omega}_2 = \omega_2, \overline{\omega}_3 = \omega_3$ .

L'égalité  $\overline{\omega}_2 = \omega_2$  exprime que l'équivalence a lieu par rapport au groupe des transformations de contact ; mais les égalités  $\overline{\omega}_1 = \omega_1, \overline{\omega}_2 = \omega_2$  montrent que l'équivalence a lieu *effectivement* par une transformation ponctuelle.

En définitive, *les problèmes d'équivalence par rapport à tout groupe, fini ou infini, susceptible d'être défini comme l'ensemble des transformations qui laissent invariante une ou plusieurs formes de Pfaff se ramènent à l'étude de la compatibilité d'un système*

$$(I) \quad \overline{\omega}_i = \omega_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

où les  $\omega_i$  sont  $n$  formes différentielles linéairement indépendantes en  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ , les  $\overline{\omega}_i$  sont  $n$  formes différentielles linéairement indépendantes en  $d\overline{x}_1, d\overline{x}_2, \dots, d\overline{x}_n$ , les coefficients de ces formes peuvent contenir des variables auxiliaires  $y_1, \dots, y_p, \overline{y}_1, \dots, \overline{y}_p$ . Il peut du reste s'ajouter au système (I) des équations finies

10/11

$$(I') \quad \overline{F}_k(\overline{x}) = F_k(x)$$

Nous allons commencer par le cas où il n'y a pas de variable auxiliaire et nous supposons, pour simplifier qu'il n'y a pas non plus d'équation finie (I') : le cas où il y en aurait se trouvera du reste examiné de lui-même dans l'exposé de la méthode.

Nous avons en somme à étudier la compatibilité du système (I) à  $n$  fonctions inconnues  $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \dots, \overline{x}_n$  de  $n$  variables indépendantes. Conformément à la théorie générale des systèmes de Pfaff, nous devons ajouter aux équations (I) les équations différentiées extérieurement  $d\overline{\omega}^i = d\omega^i$ . Mais nous pouvons exprimer les  $d\omega^i$  sous la forme

$$d\omega^i = \frac{1}{2} c_{jk}^i \omega^j \omega^k \quad (c_{jk}^i = -c_{kj}^i)$$

où le signe de sommation est supprimé par rapport aux indices  $j$  et  $k$ . Les conditions  $d\overline{\omega}^i = d\omega^i$  montrent que *les coefficients  $c_{jk}^i$  sont des invariants*, et l'on doit ajouter

aux équations (I) les équations

$$(II) \quad \bar{c}_{jk}^i(\bar{x}) = c_{jk}^i(x)$$

11/12 Nous devons alors adjoindre au système (I), (II), les équations différentiées

$$d\bar{c}_{jk}^i = dc_{jk}^i$$

en posant

$$dc_{jk}^i = c_{jk,h}^i \omega^h$$

on trouve une nouvelle série d'invariants :

$$(III) \quad \bar{c}_{jk,h}^i(\bar{x}) = c_{jk,h}^i(x)$$

et ainsi de suite. On obtient pour chacun des systèmes donnés une suite illimitée d'invariants.

Mais il n'est pas nécessaire de former toute cette suite pour reconnaître si les deux systèmes de formes donnés sont équivalentes [sic].

Prenons d'abord un cas tout à fait particulier, mais qui a une importance capitale, celui où les invariants *fondamentaux*  $c_{jk}^i$  sont tous constants pour le premier système. Il sera alors nécessaire pour l'équivalence des deux systèmes que les invariants fondamentaux  $\bar{c}_{jk}^i$  aient les mêmes valeurs constantes. *Cette condition est suffisante*, car, si elle est réalisée, les équations  $d\bar{\omega}^i = d\omega^i$  sont des conséquences des équations (I), et par suite le système (I) est complètement intégrable. Le changement de variables qui transforme les  $\omega^i$  dans les  $\bar{\omega}^i$  dépend de  $n$  constantes arbitraires. En particulier les formes  $\omega^i$  du premier système sont invariantes par une famille de transformations dépendant de  $n$  constantes arbitraires, et ces transformations forment manifestement  
12/13 un groupe, qu'on s'assure facilement être simplement transitif. Nous avons *le premier exemple d'un groupe fini et continu défini comme l'ensemble des transformations qui laissent invariantes un certain nombre de formes différentielles.*

Prenons maintenant l'autre cas extrême où parmi les invariants  $c_{jk}^i$  il y en a  $n$  indépendants, que nous appellerons  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . Il faudra pour l'équivalence des deux systèmes que les invariants  $\bar{c}_{jk}^i$  de mêmes indices soient indépendants et qu'il y ait les mêmes relations entre les  $\bar{c}_{jk}^i$  qu'entre les  $c_{jk}^i$ . Mais *ces conditions ne sont pas suffisantes*. L'équivalence exige la compatibilité du système

$$\bar{\omega}^i = \omega^i \quad \bar{I}_h = I_h$$

La différentiation extérieure donne

$$\bar{I}_{h,i} \bar{\omega}^i = I_{h,i} \omega^i$$

d'où

$$\bar{I}_{h,i} = I_{h,i}$$

en désignant par  $I_{h,i}$  les invariants dérivés des invariants fondamentaux. Il faut donc pour l'équivalence que les invariants dérivés  $\bar{I}_{h,i}$  soient les mêmes fonctions des invariants fondamentaux  $\bar{I}_h$  que pour le premier système.

Cette condition est suffisante, car si elle est réalisée, les relations

13/14

$$(IV) \quad dI_i = I_{i,k} \omega^k$$

dans lesquelles le tableau des coefficients  $I_{i,k}$  des seconds membres est de déterminant non nul, montrent que le changement de variable défini par

$$\bar{I}_i = I_i$$

entraîne de lui-même

$$\bar{\omega}^i = \omega^i$$

Il est assez paradoxal de remarquer que la conclusion reste exacte sans qu'on ait besoin de supposer que tous les invariants fondamentaux  $c_{jk}^i$  autres que  $I_1, I_2, \dots, I_n$  soient pour les deux systèmes les mêmes fonctions des  $I_1, I_2, \dots, I_n$ . C'est qu'en effet cela est une conséquence de l'hypothèse relative aux  $I_{i,k}$ . Si en effet on différencie extérieurement (IV), on trouve, en égalant à zéro l'ensemble des formes en  $\omega^h \omega^\ell$

$$c_{h\ell}^k I_{i,k} + \frac{\partial I_{i,\ell}}{\partial I_r} I_{r,h} - \frac{\partial I_{i,h}}{\partial I_r} I_{r,\ell} = 0$$

relations qui permettent de tirer tous les coefficients  $c_{h\ell}^k$  en fonctions des  $I_i$  et des  $I_{i,k}$ .

Passons maintenant *au cas général*. Supposons que les  $c_{jk}^i$  soient au nombre de  $\nu < n$  indépendants, que les  $c_{jk}^i$  et leurs premiers dérivés soient au nombre de  $\nu_1 > \nu$  indépendants, et ainsi de suite; supposons, pour fixer les idées que les  $c_{jk}^i$  et leurs dérivés des deux premiers ordres soient au nombre de  $\nu_2 > \nu_1$  indépendants, mais que les dérivés du troisième ordre n'introduisent pas d'invariant indépendant des précédents. Alors la compatibilité des équations

14/15

$$\begin{cases} \bar{\omega}^i = \omega^i \\ \bar{c}_{jk}^i = c_{jk}^i \\ \bar{c}_{jh,h}^i = c_{jh,h}^i \\ \bar{c}_{jk,h\ell}^i = c_{jk,h\ell}^i \\ \bar{c}_{jk,h\ell m}^i = c_{jk,h\ell m}^i \end{cases}$$

est une condition nécessaire d'équivalence. Elle est suffisante, car [si ?] elle est réalisée, le système

$$\begin{cases} \bar{\omega}^i = \omega^i \\ \bar{c}_{jk}^i = c_{jk}^i \\ \bar{c}_{jk,h}^i = c_{jk,h}^i \\ \bar{c}_{jk,h\ell}^i = c_{jk,h\ell}^i \end{cases}$$



est complètement intégrable, puisque les équations obtenues par différentiation extérieure sont vérifiées d'elles-mêmes comme conséquence des équations données. La <sup>15/16</sup> solution générale du système dépend du reste de  $n - \nu_2$  constantes arbitraires.

En particulier, si l'on considère les formes  $\omega^i$  du premier système, elles sont invariantes pour un groupe à  $n - \nu_2$  paramètres. Ce groupe se présente comme formé de l'ensemble des transformations qui laissent invariantes  $\nu_2$  fonctions ( $\nu_2$  invariants indépendants) et  $n$  formes de Pfaff. C'est un groupe *intransitif*.

Enfin, une dernière question peut se poser. Il résulte manifestement de ce qui précède qu'un système de formes  $\omega^i$  est caractérisé surabondamment par l'ensemble de ses invariants dérivés des différents ordres, puisque la connaissance de ses invariants dérivés jusqu'à l'ordre  $p + 1$  suffit au cas où la formation des invariants d'ordre  $p + 1$  n'introduit pas d'invariant indépendant de ceux des  $p$  premiers ordres. Le système est complètement caractérisé par les relations qui lient entre eux tous ces invariants. *Mais ces relations ne sont pas arbitraires*, et on peut se demander quelle est la manière la plus générale dont on peut se les donner. Je me bornerai au cas où les invariants fondamentaux  $c_{jk}^i$  en contiennent  $n$  indépendants  $I_i$ . Nous avons vu, alors, que le système était caractérisé par les fonctions  $I_{i,k}$  des  $I_i$ . Ces fonctions étant connues on a les  $\omega^i$  en résolvant les équations

$$(V) \quad dI_i = I_{i,k} \omega^k$$

<sup>16/17</sup> les fonctions  $I_{i,k}$  des  $I_i$  seront admissibles si les formes  $\omega^i$  que nous venons d'obtenir satisfont aux relations

$$d\omega^i = \frac{1}{2} c_{jk}^i \omega^j \omega^k$$

ou encore si les équations (V) différenciées extérieurement sont vérifiées en y remplaçant  $d\omega^i$  par  $\frac{1}{2} c_{jk}^i \omega^j \omega^k$ . Le calcul a déjà été fait et a donné

$$\frac{\partial I_{i,\ell}}{\partial I_r} I_{r,h} - \frac{\partial I_{i,h}}{\partial I_r} I_{r,\ell} + c_{h\ell}^k I_{i,k} = 0$$

Si l'on élimine entre ces équations les  $c_{h\ell}^k$  autres que les  $n$  invariants  $I_1, \dots, I_n$ , on obtiendra un système d'équations aux dérivées partielles exprimant les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions données  $I_{i,k}$  des  $I_i$  satisfassent à la question. Ce système différentiel est en involution et sa solution générale dépend de  $n^2 - n$  fonctions arbitraires de  $n$  arguments, ce qui serait facile à prévoir par un raisonnement, du reste peu rigoureux.

Les cas où les  $c_{jk}^i$  sont des constantes a une extrême importance. Ces constantes *ne peuvent pas* être quelconques; on retrouve la question dans la théorie des groupes <sup>17/18</sup> finis et continus, où elle fait l'objet du troisième théorème fondamental de S.Lie.

Passons maintenant au problème général d'équivalence tel que nous l'avons formulé : nous nous limiterons, ce qui n'est pas une restriction essentielle à l'étude de la compatibilité d'un système

$$(I) \quad \bar{\omega}^i = \omega^i$$

où les  $\omega^i$  sont  $n$  formes différentielles linéairement indépendantes en  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ , avec des coefficients fonctions de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et de  $p$  autres variables auxiliaires  $y_1, y_2, \dots, y_p$ ; les  $\bar{\omega}_i$  étant définis d'une manière analogue avec les mêmes entiers  $n$  et  $p$ . En fait les  $\omega^i$  se déduisent, elles aussi, de  $n$  formes particulières par l'effet d'une substitution linéaire appartenant au même groupe. Mais la méthode s'applique quelle que soit l'origine des variables auxiliaires. Nous nous bornerons du reste à quelques indications schématiques.

Les équations (I) entraînent évidemment si elles sont compatibles, que les  $\bar{x}_i$  sont des fonctions des seules variables  $x$ . Les différentielles  $d\omega_i$  sont évidemment linéaires par rapport aux  $dx_k$ , c'est-à-dire aux  $\omega^k$ , mais contiennent aussi les différentielles des variables auxiliaires  $y$ , et l'on peut écrire

$$d\omega^i = \omega^k \varpi_k^i$$

18/19

le signe de sommation par rapport à  $k$  étant omis, les  $\varpi_k^i$  étant linéaires par rapport aux  $dx_i$  et aux  $dy_j$ ; chaque  $\varpi_k^i$  n'est du reste pas complètement déterminée, car on peut lui ajouter certaines combinaisons linéaires des  $\omega^i$  sans altérer les seconds membres. Quoiqu'il en soit, supposons que  $q$  d'entre elles soient linéairement indépendantes (mod.  $dx_1, dx_2, \dots, dx_n$ ); appelons-les  $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_q$ . On pourra écrire

$$\varpi_i^j = a_{ik}^j \varpi^k \quad (\text{mod. } \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)$$

Il est clair que les  $a_{ik}^j$  sont des invariants. Si l'un de ces invariants dépend effectivement des variables  $y_1, y_2, \dots, y_q$ , on pourra disposer des variables auxiliaires de manière que cet invariant prenne une valeur numérique fixe <sup>(1)</sup>; il est clair alors que les équations (I) exigeront que les variables auxiliaires  $\bar{y}_i$  satisfassent aux mêmes conditions, c'est-à-dire, soient telles que l'invariant  $\bar{a}_{ik}^j$  de même nom prenne la même valeur numérique fixe. La considération des invariants  $a_{ik}^j$  permet donc dans certains cas de réduire le nombre des variables auxiliaires, et cela tant qu'il se présentera des invariants de la nature indiquée qui dépendent effectivement des variables auxiliaires.

19/20

Nous pouvons maintenant supposer effectuée la réduction du nombre des variables auxiliaires de manière que les invariants  $a_{ik}^j$  ne dépendent plus que des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . À ce moment là deux autres sources de réduction peuvent se présenter. Si les invariants obtenus ne sont pas tous constants, les invariants dérivés  $I_1, I_2, \dots, I_n$  de l'un d'entre eux  $I$

$$dI = I_1\omega_1 + I_2\omega_2 + \dots + I_n\omega_n$$

pourront dépendre encore des variables auxiliaires. En outre les formules

$$d\omega_i = a_{kh}^i \omega^k \varpi^h \quad (\text{mod. } \omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n)$$

---

1. Il est clair qu'il y aura lieu ici de préciser; une classification, du reste conforme à la nature des choses, sera à faire. En fait, dans le cas où nous nous sommes [la note continue sur la page 20] (suite) : placés, où les variables auxiliaires ne sont autres que les paramètres d'un groupe linéaire, les invariants  $a_{ik}^j$  sont des constantes numériques, de sorte que la question ne se poserait pas.

montrent que les équations (I) si elles sont compatibles, entraînent

$$\bar{\omega}^h = \varpi^h \pmod{\omega^1, \omega^2, \dots, \omega^n}$$

20/21 D'après l'esprit de la méthode générale, il y a lieu d'introduire les  $q$  formes invariantes

$$(\varpi^h)^* = \varpi^h - z_k^h \omega^k$$

avec les variables auxiliaires  $z_k^h$ , on aura alors

$$d\omega^i = a_{kh}^i \omega^k (\varpi^h)^* + \frac{1}{2} c_{kh}^i \omega^k \omega^h;$$

les  $c_{kh}^i$  sont encore des invariants qui dépendent du reste linéairement des variables auxiliaires  $z_k^h$ ; on disposera de ces variables de manière à annuler le plus grand nombre possible de ces invariants. Ceux qui restent, s'ils dépendent effectivement de variables auxiliaires  $y_i$  qui ont été conservées, permettent encore une réduction et ainsi de suite.

Finalement on peut supposer que les seuls invariants restants ne dépendent que de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ainsi que leurs invariants dérivés successifs.

Dans ces conditions, le système (I) pour être compatible, exigera l'égalité chacun à chacun des invariants obtenus; on le complètera donc par un système d'équations finies

$$(II) \quad \bar{I}_k = I_k$$

tel que les équation (I) et (II) différenciées, ne donnent plus d'équations finies nouvelles 21/22 et conduisent aux seules équations

$$a_{kh}^i \omega^k [(\bar{\varpi}_k^i)^* - (\varpi_k^i)^*] = 0$$

Si les coefficients  $a_{kh}^i$  forment un *système involutif*, le système (I), (II) sera en involution, et sa solution générale dépendra de *fonctions arbitraires*, au cas du moins où il restera des variables auxiliaires  $y$ . Chacun des deux systèmes donnés admettra un groupe infini déterminé par l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les fonctions  $I_k$  et les formes  $\omega^i$ . S'il ne reste aucune variable auxiliaire  $y$ , c'est qu'on aura été ramené chemin faisant au premier problème étudié (absence de variables auxiliaires).

S'il reste des variables auxiliaires, et que le système de coefficients ne soit pas involutif, on prolongera le système (I), (II) par l'adjonction des équations

$$(\bar{\varpi}_i^j)^* = (\varpi_i^j)^*$$

et on sera ramené à un problème de même nature que le problème initial, avec comme nouvelles variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  et les  $y_k$ , les nouvelles variables auxiliaires étant les  $z_i^j$ , s'il y en a.

Toutes ces opérations auront une fin puisque, d'après la théorie générale, l'intégration 22/23 du système (I) initial peut, par prolongements successifs, être ramenée à celle d'un système en involution, au cas, du moins, où il y a compatibilité.

La méthode générale qui vient d'être esquissée fournit donc à la fois les conditions d'équivalence, la suite des invariants différentiels, et aussi *une suite de formes invariants différentielles*. Les invariants différentiels sont donnés par des différentiations, au lieu que la méthode de S.Lie les fournit par des intégrations de systèmes complets.

Il ne sera pas inutile de donner quelques exemples particulièrement simples.

**Problème I.** *On considère dans un plan deux familles de courbes à un paramètre. Conditions d'équivalence par rapport au groupe des transformations conformes du plan.*

Rapportons le plan à un système de coordonnées rectangulaires  $x, y$ , et soit, en chaque point  $M$  du plan,  $\theta$  l'angle que fait avec  $Ox$  la tangente en  $M$  à la courbe de la première famille qui passe par ce point.  $\theta$  est une fonction donnée de  $x, y$ . L'équation différentielle des courbes de la famille est

$$-\sin \theta dx + \cos \theta dy = 0$$

23/24

Posons

$$\omega_1 = u(\cos \theta dx + \sin \theta dy)$$

$$\omega_2 = u(-\sin \theta dx + \cos \theta dy)$$

L'équation  $\omega_1 = 0$  est l'équation des trajectoire orthogonales des courbes données.

En posant de même

$$\bar{\omega}_1 = \bar{u}(\cos \theta d\bar{x} + \sin \theta d\bar{y})$$

$$\bar{\omega}_2 = \bar{u}(-\sin \theta d\bar{x} + \cos \theta d\bar{y})$$

les conditions d'équivalence sont les conditions de compatibilité du système

$$(I) \quad \bar{\omega}_1 = \omega_1 \quad \bar{\omega}_2 = \omega_2$$

Si ce système est vérifié les deux familles de courbes données seront transformées l'une dans l'autre par une transformation ponctuelle telle que

$$\bar{u}^2(d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2) = u^2(dx^2 + dy^2)$$

ce sera une transformation conforme.

On a ici

$$d\omega_1 = \frac{du}{u}\omega_1 + u\left(\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) dx dy$$

$$d\omega_2 = \frac{du}{u}\omega_2 + u\left(\cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y}\right) dx dy$$

24/25

On posera conformément à la théorie générale

$$\frac{du}{u} = \bar{\omega} + \lambda dx + \mu dy$$

d'où

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \varpi\omega_1 + \frac{1}{u} \left( \lambda \sin \theta - \mu \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \omega_1 \omega_2 \\ d\omega_2 &= \varpi\omega_2 + \frac{1}{u} \left( \lambda \sin \theta - \mu \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

On peut annuler les deux quantités entre parenthèses en prenant

$$\lambda = -\frac{\partial \theta}{\partial y} \quad \mu = \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad \varpi = \frac{du}{u} + \frac{\partial \theta}{\partial y} dx - \frac{\partial \theta}{\partial x} dy$$

On est donc ramené à trois formes  $\omega_1, \omega_2, \omega_3 (= \varpi)$  linéairement indépendantes en  $dx, dy, du$ . Le calcul donne

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \varpi\omega_1 \\ d\omega_2 &= \varpi\omega_2 \\ d\varpi &= -\frac{1}{u^2} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

On arrive ainsi au premier invariant  $\frac{1}{u^2} \Delta \theta$ .

<sup>25/26</sup> Si  $\Delta \theta = 0$  pour la première famille de courbes, il faudra que  $\Delta \bar{\theta} = 0$  pour la seconde : les deux familles seront équivalentes et la transformation conforme qui réalise l'équivalence dépend de trois constantes arbitraires.

La condition  $\Delta \theta = 0$  exprime que la première famille s'obtient en égalant à une constante arbitraire la partie réelle (ou la partie imaginaire) d'une fonction analytique de  $x + iy$ . Cette famille admet un groupe à trois paramètres formé par l'ensemble des transformations qui laissent invariantes les formes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= u(\cos \theta dx + \sin \theta dy), & \omega_2 &= u(-\sin \theta dx + \cos \theta dy) \\ \omega_3 &= \frac{du}{u} + \frac{\partial \theta}{\partial y} dx - \frac{\partial \theta}{\partial x} dy \end{aligned}$$

Si  $\Delta \theta \neq 0$ , par exemple  $\Delta \theta > 0$ , on disposera de la variable auxiliaire  $u$  pour rendre l'invariant  $\frac{1}{u^2} \Delta \theta$  égal à 1, ce qui conduira aux deux formes invariantes

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\Delta \theta} (\cos \theta dx + \sin \theta dy) \\ \omega_2 &= \sqrt{\Delta \theta} (-\sin \theta dx + \cos \theta dy) \end{aligned}$$

et on sera ramené au problème traité en premier lieu. La forme  $\omega_3$  étant dépendante de  $\omega_1$  et  $\omega_2$  :  $\omega_3 = a\omega_1 + b\omega_2$ , les coefficients  $a$  et  $b$  sont des invariants. Ils ne peuvent, <sup>26/27</sup> du reste, être constants tous les deux, car les égalités

$$\begin{aligned} d\omega_1 &= \omega_3 \omega_1 = -b\omega_1 \omega_2 \\ d\omega_2 &= \omega_3 \omega_2 = a\omega_1 \omega_2 \\ d\omega_3 &= -\omega_1 \omega_2 \end{aligned}$$

donnent les relations

$$b_1 - a_2 = -1$$

entre les premiers invariants dérivés, ce qui exclut la possibilité pour ces invariants dérivés d'être tous nuls. Une famille de courbes qui ne rentre pas dans le premier type est donc invariante par un groupe à un paramètre de transformations conformes.

**Problème II.** On considère sur une droite un champ de forces  $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$  et on suppose imposée la mesure du temps  $t$ . Étudier les conditions d'équivalence de deux champs de forces par rapport au groupe infini des changements arbitraires (analytiques) de la coordonnée d'espace  $x$ .

La donnée est ici l'équation différentielle

$$\frac{d^2x}{dt^2} - F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$$

par rapport au groupe  $t' = t$ ,  $x' = f(x)$ , qu'on peut définir par l'invariance de la variable  $t$  et des formes  $dt$  et  $\alpha dx$ . L'équation différentielle étant remplacée par le système de Pfaff

$$dx - x' dt = 0 \quad dx' - F dt = 0$$

on aura les formes invariantes

$$\omega_1 = dt \quad \omega_2 = \frac{dx}{x'} \quad \omega_3 = u[(dx' - F dt) + v(dx - x' dt)]$$

Les relations

$$d\omega_1 = 0 \quad d\omega_2 = \frac{dx dx'}{x'^2} = \left(v + \frac{F}{x'}\right) \omega_1 \omega_2 + \frac{1}{ux'} \omega_2 \omega_3$$

conduisent aux deux invariants  $v + \frac{F}{x'}$  et  $\frac{1}{ux'}$ . On peut donc disposer les variables auxiliaires de manière à annuler le premier et à rendre le second égal à 1.

$$u = \frac{1}{x'} \quad v = -\frac{F}{x'}$$

d'où

$$\omega_3 = \frac{dx'}{x'} - \frac{F}{x'^2} dx$$

Il ne reste plus de variables auxiliaires. Le calcul donne

$$d\omega_1 = 0 \quad d\omega_2 = \omega_2 \omega_3$$

$$d\omega_3 = -\frac{1}{x'} \frac{\partial F}{\partial t} \omega_1 \omega_2 + \left(\frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{2F}{x'}\right) \omega_2 \omega_3$$

et conduit aux invariants fondamentaux

$$I_1 = -\frac{1}{x'} \frac{\partial F}{\partial t} \quad I_2 = \frac{\partial F}{\partial x'} - \frac{2F}{x'}$$

Les champs de force équivalents à zéro sont ceux qui annulent ces deux invariants, à savoir

$$F = X(x) \cdot x'^2$$

chacun d'eux admet un groupe à deux paramètres (la variable  $t$  ne peut être transformée).

**Problème III.** *Propriétés topologiques de la figure formée par trois familles à un paramètre de courbes planes (premier problème de la géométrie textile).*

Soient

$$\frac{dy}{dx} = F_i(x, y) \quad (i = 1, 2, 3)$$

les équations différentielles des courbes des trois familles. Ces données sont équivalentes à un système de trois formes de Pfaff

$$\omega_i = u_i(dy - F_i dx) \quad (i = 1, 2, 3)$$

Ces trois formes ne sont pas linéairement indépendantes : elles sont liées par la relation

$$\frac{F_2 - F_3}{u_1} \omega_1 + \frac{F_3 - F_1}{u_2} \omega_2 + \frac{F_1 - F_2}{u_3} \omega_3 = 0$$

<sup>29/30</sup> On disposera des variables auxiliaires  $u_i$  de manière à rendre égaux les trois coefficients, ce qui donne

$$u_1 = u(F_2 - F_3) \quad u_2 = u(F_3 - F_1) \quad u_3 = u(F_1 - F_2)$$

Il suffira alors de considérer les deux premières formes

$$\omega_1 = u(F_2 - F_3)(dy - F_1 dx)$$

$$\omega_2 = u(F_3 - F_1)(dy - F_2 dx)$$

On est ramené à un problème analogue au problème I. On aura

$$d\omega_1 = \varpi\omega_1, \quad d\omega_2 = \varpi\omega_2$$

en posant

$$\varpi = \frac{du}{u} + \text{une combinaison linéaire convenable de } dx \text{ et } dy.$$

On a ensuite

$$d\varpi = \frac{H}{u^2} \omega_1 \omega_2$$

$H$  étant une fonction de  $x, y$ .

1°- si  $H = 0$  (réseau hexagonal de Blaschke) la figure est équivalente à celle formée par trois familles de droites parallèles ; elle admet un groupe à trois paramètres.

2°- si  $h \neq 0$ , on pose  $u = \sqrt{H}$  et on est ramené à deux formes à deux variables.

<sup>30/31</sup>

On pourrait encore traiter le problème en réduisant les deux premières familles données aux deux familles de droites parallèles aux axes et on aurait alors l'étude d'une équation différentielle  $\frac{dy}{dx} = F(x, y)$  par rapport au groupe infini  $x' = f(x)$ ,  $y' = \varphi(y)$ , ce qui conduit aux deux formes

$$\omega_1 = uF dx, \quad \omega_2 = u dy$$

**Problème IV.** Trouver les conditions d'applicabilité de deux surfaces données par leur  $ds^2$ .

Dans les problèmes précédents, nous avons fait effectivement les calculs, au moins au début ; mais il y a beaucoup de cas, spécialement dans les recherches théoriques où la nature des résultats peut être prévue sans que les calculs aient besoin d'être effectués complètement. Nous allons montrer sur ce dernier problème comment on peut procéder.

Le premier  $ds^2$  donné étant supposé d'une manière particulière décomposé en somme de deux carrés  $\omega_1^2 + \omega_2^2$  nous poserons

$$\omega_1^* = \omega_1 \cos \theta + \omega_2 \sin \theta, \quad \omega_2^* = -\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta$$

en introduisant une variable auxiliaire  $\theta$  ; les variables dont dépend le  $d\bar{s}$  seront désignés par  $x_1, x_2$ , mais n'interviendront pas effectivement. 31/32

On a

$$d\omega_1^* = d\theta(-\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta) + d\omega_1 \cos \theta + d\omega_2 \sin \theta$$

le second membre est de la forme

$$d\omega_1^* = d\theta\omega_2^* + a\omega_1^*\omega_2^*$$

On a de même

$$d\omega_2^* = -d\theta\omega_1^* + b\omega_1^*\omega_2^*$$

On posera

$$\omega_3^* = d\theta + a\omega_1^* + b\omega_2^*$$

ce qui donnera

$$d\omega_1^* = \omega_3^*\omega_2^*, \quad d\omega_2^* = -\omega_3^*\omega_1^*$$

Les trois formes  $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$  sont linéairement indépendantes en  $dx_1, dx_2, d\theta$ . La différentielle  $d\omega_3^*$  a priori peut être une forme quadratique extérieure quelconque en  $\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*$ , mais nous allons voir qu'elle est très particulière. En effet, la différentiation extérieure de  $d\omega_1^*$  et  $d\omega_2^*$  donne

$$d\omega_3^*\omega_2^* - \omega_3^*d\omega_2^* = 0 \quad \text{ou} \quad d\omega_3^*\omega_1^* = 0$$

32/33

$$-d\omega_3^*\omega_1^* + \omega_3^*d\omega_1^* = 0 \quad \text{ou} \quad d\omega_3^*\omega_2^* = 0$$

la forme  $d\omega_3^*$  s'annulant avec  $\omega_1^*$  et avec  $\omega_2^*$  est donc nécessairement

$$d\omega_3^* = -K\omega_1^*\omega_2^*$$

Nous obtenons un premier invariant  $K$ . A priori cet invariant pourrait dépendre de  $x_1, x_2$ , et  $\theta$  ; nous allons voir qu'il ne dépend pas de  $\theta$ , car la différentiation extérieure de la dernière équation obtenue donne

$$dK\omega_1^*\omega_2^* + Kd\omega_1^*\omega_2^* - K\omega_1^*d\omega_2^* = 0$$



ou en simplifiant

$$dK \omega_1^* \omega_2^* = 0$$

la différentielle  $dK$  s'annulant quand on annule à la fois  $\omega_1^*$  et  $\omega_2^*$ , c'est-à-dire  $dx_1$  et  $dx_2$ , c'est que  $K$  est une fonction de  $x_1, x_2$ . Sans être obligé d'entrer dans aucun calcul effectif, nous démontrons donc l'existence d'une fonction construite avec les coefficients du  $ds^2$  et qui se conserve par déformation : c'est la *courbure totale*.

Deux surfaces qui ont la même courbure totale constante sont applicables et l'application dépend de trois constantes arbitraires, car nous sommes dans le cas de trois <sup>33/34</sup> formes  $\omega_i$  à trois variables avec des coefficients  $c_{jk}^i$  constants.

Nous ne poursuivrons pas plus loin la discussion. Contentons-nous de dire que si  $K$  n'est pas constant, on peut se débarrasser de l'inconnue auxiliaire  $\theta$ , de manière que la différentielle  $dK$  ne dépende que de  $\omega_1^*$ .

En passant remarquons que le groupe des déplacements du plan correspond à  $ds^2 = dx^2 + dy^2$ , avec

$$\omega_1^* = dx \cos \theta + dy \sin \theta, \quad \omega_2^* = -dx \sin \theta + dy \cos \theta, \quad \omega_3^* = d\theta$$

On voit la signification géométrique de ces formes : ce sont les composantes relatives de la translation et de la rotation que subit un système d'axes rectangulaires d'origine  $(x, y)$  faisant l'angle  $\theta$  avec les axes fixes. L'étude des propriétés géométriques élémentaires d'une courbe plane  $y = f(x)$  n'est autre que l'étude du système formé par l'équation de cette courbe et les trois formes  $\omega_i^*$ . En tenant compte de l'équation donnée, ces trois formes deviennent

$$\omega_1^* = (\cos \theta + y' \sin \theta) dx, \quad \omega_2^* = (-\sin \theta + y' \cos \theta) dx, \quad \omega_3^* = d\theta$$

Les deux premières sont proportionnelles, leur rapport est un invariant ; en choisissant  $\theta$  de manière que cet invariant soit nul ( $\theta = \arctg y'$ ), ce qui est un choix de nature <sup>34/35</sup> invariante, on aura

$$\omega_1^* = \sqrt{1 + y'^2} dx \quad \omega_3^* = \frac{y''}{1 + y'^2} dx$$

la première forme n'est autre que l'élément d'arc  $ds$  de la courbe, le rapport  $\frac{\omega_3^*}{\omega_1^*}$  n'est autre que la courbure  $\frac{y''}{(1 + y'^2)^{1/2}}$ . C'est l'exemple le plus simple d'un problème traité par la méthode du repère mobile, ayant pour objet l'étude des propriétés des figures envisagées par rapport à un groupe. Le problème I est un problème traité d'une manière tout à fait analogue, mais pour le groupe *infini* des transformations conformes du plan.

Revenons à une surface quelconque ; bien qu'on [n']ait pas dans ce cas affaire à un groupe, on peut néanmoins appliquer les mêmes procédés pour étudier les propriétés d'une ligne tracée sur la surface comme si cette surface était un plan ; la détermination de la variable auxiliaire  $\theta$  faite par le même procédé conduira à une forme  $\omega_3^*$  qui ne

sera autre que  $\frac{d\theta}{\rho g}$ , en désignant par  $\frac{1}{\rho g}$  la courbure géodésique. C'est l'exemple le plus simple d'un *espace généralisé* dans lequel les procédés d'une géométrie différentielle fondée sur un groupe continuent à s'appliquer sans qu'aucun groupe règne dans l'espace.

35/36

Nous avons ramené tous les problèmes d'équivalence à la considération de formes différentielles linéaires. Il est des cas admettant un traitement plus simple. Considérons, par exemple, une forme différentielle quadratique *extérieure*  $\omega$  à différentielle extérieure  $d\omega$  identiquement nulle. Au point de vue algébrique la forme peut être écrite

$$\omega = \omega_1\omega_2 + \omega_3\omega_4 + \cdots + \omega_{2p-1}\omega_{2p}$$

les  $\omega_i$  étant  $2p$  formes différentielles linéaires indépendantes. L'entier  $p$  est un invariant et la forme  $\omega$  (si  $d\omega = 0$ ) peut être décrite au moyen de  $2p$  variables. Deux formes  $\omega$ ,  $\bar{\omega}$ , correspondant au même entier  $p$  sont toujours équivalentes, l'équation  $\bar{\omega} = \omega$  à  $2p$  fonctions inconnues  $\bar{x}_i$  de  $2p$  variables indépendantes  $x_i$  étant en involution avec

$$s_1 = s_2 = \cdots = s_{2p-1} = 1$$

En particulier toute forme  $\omega$  de rang  $2p$  et de différentielle nulle est équivalente à la forme

$$\omega = dx_1 dx_2 + dx_3 dx_4 + \cdots + dx_{2p-1} dx_{2p};$$

elle admet un groupe infini, caractérisé précisément par la propriété de laisser invariante la forme  $\omega$ .

Si  $d\omega \neq 0$ , la discussion du problème d'équivalence est beaucoup plus compliquée et il faut appliquer la méthode générale. 36/37

Un autre cas intéressant et simple est fourni par une forme extérieure de degré  $n - 1$  à  $n$  variables : une telle forme est toujours algébriquement réductible à

$$\omega = \omega_1\omega_2 \cdots \omega_{n-1}$$

Deux cas sont à distinguer.

a)  $d\omega = 0$ ; alors la forme est toujours équivalente à

$$\omega = dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}$$

b)  $d\omega \neq 0$ ; alors la forme est toujours réductible à

$$\omega = x_n dx_1 dx_2 \cdots dx_{n-1}$$

Dans ce dernier cas par exemple la forme admet un groupe infini obtenu en prenant pour  $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1}$  des fonctions arbitraires des  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$  et en prenant ensuite

$$\bar{x}_n = \frac{x_n}{\frac{D(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{n-1})}{D(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})}}$$


---

Il me reste à dire quelques mots d'une application des méthodes précédentes à l'intégration de certains systèmes différentiels. Je me contenterai de l'exemple fourni  
37/38 par un système de deux équations aux dérivées partielles du second ordre, dit en involution

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0 \quad \Phi(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0$$

système étudié par E.Goursat. Imaginons qu'on ait exprimé  $r, s, t$  en fonction de  $x, y, z, p, q$  et d'un paramètre  $i$ . Le système donné peut être ramené au système de Pfaff

$$\theta_1 = da - p dx - q dy = 0$$

$$\theta_2 = dp - r dx - s dy = 0$$

$$\theta_3 = dq - s dx - t dy = 0$$

On a, en tenant compte des équations précédentes

$$d\theta_1 = 0$$

$$d\theta_2 = \left( \frac{dr}{dy} - \frac{ds}{dx} \right) dx dy + \frac{\partial r}{\partial u} dx du + \frac{\partial s}{\partial u} dy du$$

$$d\theta_3 = \left( \frac{ds}{dy} - \frac{dt}{dx} \right) dx dy + \frac{\partial s}{\partial u} dx du + \frac{\partial t}{\partial u} dy du$$

où l'on a posé

$$\frac{d}{dx} = \frac{\partial}{\partial x} + p \frac{\partial}{\partial z} + r \frac{\partial}{\partial p} + s \frac{\partial}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dy} = \frac{\partial}{\partial y} + q \frac{\partial}{\partial z} + s \frac{\partial}{\partial p} + t \frac{\partial}{\partial q}$$

Le système est en involution si les deux formes réduites  $d\theta_2, d\theta_3$  sont proportion-  
38/39 nelles

$$\frac{\frac{dr}{dy} - \frac{ds}{dx}}{\frac{ds}{dy} - \frac{dt}{dx}} = \frac{\frac{\partial r}{\partial u}}{\frac{\partial s}{\partial u}} = \frac{\frac{\partial s}{\partial u}}{\frac{\partial t}{\partial u}}$$

Dans ce cas les trois équations  $\theta_i = 0$  peuvent s'écrire au moyen de cinq variables seulement : ces variables sont les intégrales premières du système des *caractéristiques* obtenu en annulant  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  et les dérivées partielles de  $d\theta_2$  par rapport à  $dx, dy, du$ .

Toute variété intégrale à deux dimensions est engendrée par des courbes caractéristiques si l'on connaît ces dernières, on n'a qu'à chercher les solutions à une dimension du système  $\theta_i = 0$ , à cinq variables, solutions qui indiquent de quelle manière il faut associer les courbes caractéristiques pour engendrer une surface intégrale. Or, dans le cas général, *les caractéristiques sont connues par des différentiations*.

En effet, les opérations qui servent à obtenir les invariants différentiels du système donné par rapport au groupe de toutes les transformations analytiques portant sur  $x, y, z, p, q, u$  peuvent se faire quelles que soient les variables choisies : si l'on imagine qu'on ait choisi les 5 variables intégrales premières des équations des caractéristiques, ces opérations ne pourront conduire qu'à des fonctions de ces cinq variables. En général, le système total des invariants en contiendra cinq indépendants qui fourniront cinq intégrales premières. On conçoit qu'une méthode analogue puisse s'appliquer toutes les fois qu'un système différentiel admet des caractéristiques au sens de Cauchy.

39/40

---

### Bibliographie. E. CARTAN

- Les sous-groupes des groupes continus de transformations (Ann. Ec.Norm. 25 – 1908, chap.I, p.57)
- Les systèmes de Pfaff à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre (Ann. Ec.Norm. 27 – 1910, p.10)
- Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés (Mathematica, 4, 1930, p.114)
- Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes (Annali di matem. 11. 1932, p.18)
- La géométrie de l'intégrale  $\int F(x, y, y', y'') dx$  (J.de Math. 1936, p.42)

*J.DUBOURDIEU*<sup>[3]</sup> Questions topologiques de géométrie différentielle (Mémorial de Math. LXXVIII–1936).

### Notes

1. Les articles cités dans la bibliographie à la fin de cet exposé sont tous dus à Élie Cartan lui-même. Il s'agit de [Car08], [Car10], [Car30], [Car32] et [Car36].

Dans l'errata (note suivante) est ajoutée la référence au fascicule [Dub36] de Dubourdieu. Rappelons que c'était, à l'origine, Jules Dubourdieu qui devait donner cet exposé (voir page 86).

2. Texte corrigé à l'aide de l'errata, relié après l'exposé 4-G.

3. Cette dernière référence a été ajoutée dans l'errata.

**Références**

- [Car08] É. CARTAN – « Les sous-groupes des groupes continus de transformations », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (3)* **25** (1908), p. 57–194.
- [Car10] ———, « Les systèmes de *Pfaff* à cinq variables et les équations aux dérivées partielles du second ordre », *Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. (3)* **27** (1910), p. 109–192.
- [Car30] ———, « Sur un problème d'équivalence et la théorie des espaces métriques généralisés », *Mathematica* **4** (1930), p. 114–136.
- [Car32] ———, « Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de l'espace de deux variables complexes, I », *Annali di Mat.* **11** (1932), p. 18–90.
- [Car36] ———, « La géométrie de l'intégrale  $\int F(x, y, y', y'') dx$  », *J. Math. Pures Appl., IX. Sér.* **15** (1936), p. 42–69.
- [Dub36] J. DUBOURDIEU – *Questions topologiques de géométrie différentielle*, Mem. Sci. Math., vol. 78, Gauthier-Villars, Paris, 1936.