LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES
1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

3. Année 1935-1936
Topologie

André Weil

Application des invariants d'homologie à la caractérisation des classes de représentations

Séminaire de mathématiques (1935-1936), Exposé 3-G, 10 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1935-1936__3__G_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 17 février 1936
Exposé 3-G, p. 1 à 10

APPLICATION DES INVARIANTS D'HOMOLOGIE À LA CARACTÉRISATION DES CLASSES DE REPRÉSENTATIONS

par **André Weil**

On a[1] déjà eu l'occasion de parler de la distinction entre homologie et homotopie (v. exposé B). On rappelle la définition :

Deux complexes singuliers C^n, C'^n, images continues d'un même complexe simplicial c^n dans un espace topologique donné quelconque, sont dits *homotopes*, si l'on peut les déduire l'un de l'autre par déformation continue. Au moyen du produit topologique d^{n+1} de c^n par le segment $0 \leqslant t \leqslant 1$, on peut encore dire que $C^n = f(c^n)$ et $C'^n = f'(c^n)$ sont homotopes si l'on peut définir une fonction continue f sur d^{n+1}, prenant ses valeurs dans l'espace donné (c'est-à-dire une image continue de d^{n+1} dans cet espace) se réduisant à f pour $t = 0$ et à f' pour $t = 1$. Si C'^n se réduit à un point, on dit que C^n est *homotope à zéro*.

On a vu (ibid.) que deux complexes homotopes sont nécessairement homologues. La réciproque n'est pas vraie, comme on sait (voir par ex. l'exposé de Marty sur le groupe de Poincaré[2]). Mais on doit à H.Hopf d'avoir démontré cette réciproque dans certains cas particuliers très intéressants. C'est à l'exposé de ces résultats (dont une partie avait d'ailleurs été pressentie par Brouwer) que va être consacrée la présente conférence. 1/2

Quand deux représentations[3] $C^n = f(c^n)$, $C'^n = f'(c^n)$ d'un même complexe c^n dans un même espace définissent des complexes homotopes, il est d'usage de dire aussi que les deux représentations appartiennent à la même *classe* (« Abbildungsklasse »). De plus, on a vu que, pour savoir si deux complexes singuliers sont homotopes (ou si deux représentations appartiennent à la même classe) on a à résoudre un problème du type suivant : K étant un complexe donné, K_0 un complexe partiel composé d'éléments de K, déterminer une fonction continue sur K, prenant ses valeurs dans un espace donné (c'est-à-dire une représentation de K dans cet espace), qui prenne sur K_0 des valeurs données ; ou autrement dit, prolonger à K d'une manière continue, une fonction donnée sur K_0. Un tel problème s'appelle un « problème de prolongement » (« Erweiterungsaufgabe ») ; nous donnerons aussi les résultats de Hopf sur certains problèmes de ce type.

On a déjà dit (v.exposé de Leray) qu'on peut toujours prolonger dans un espace topologique *normal* quelconque une fonction continue, à *valeurs numériques*, donnée sur un sous-ensemble fermé quelconque de l'espace ; d'où il résulte qu'on peut toujours prolonger aussi une fonction prenant ses valeurs dans un espace euclidien à p dimen-
2/3 sions $x_1, x_2, \dots, x_p$ (il suffit de faire le prolongement de chacune des coordonnées x_i séparément).

On désignera par S^n la sphère à n dimensions ; on sait qu'elle est topologiquement identique à la frontière $\left|\dot{X}^{n+1}\right|$ d'un simplexe X^{n+1} à $n+1$ dimensions ; on sait aussi que la sphère S^n *pointée* (c'est-à-dire où l'on a enlevé un point p) est topologiquement identique à un espace euclidien R^n à n dimensions, et par suite que la sphère S^n deux fois pointée (c'est-à-dire d'où l'on a enlevé deux points p et q) est topologiquement identique à $R^n - o$ (espace R^n d'où l'on a enlevé un point o).

D'autre part, soit R^{n+1} un espace euclidien à $n+1$ dimensions, S^n la sphère de centre o et de rayon 1 dans R^{n+1} ; à tout point x de $R^{n+1} - o$, faisons correspondre l'intersection $z = \varphi(x)$ de la demi-droite ox avec S^n ; et soit $\rho = \log(ox)$; tout point x de $R^{n+1} - o$ est ainsi représenté par ses coordonnées polaires (z, ρ) d'une manière et d'une seule ; autrement dit, $R^{n+1} - o$ est le produit topologique de S^n par la droite $-\infty < \rho < +\infty$.

Ces préliminaires posés, nous diviserons (d'après Hopf) notre exposé en trois parties.

1ère partie. Représentations de degré 0 de S^n dans S^n

Dans toute cette partie (mais non dans les suivantes), le degré topologique sera pris *par rapport à l'anneau des entiers rationnels.* On désignera par S^n à la fois
3/4 la sphère à n dimensions et le cycle algébrique à n dimensions qu'elle définit au signe près (c'est-à-dire, dans une triangulation quelconque de S^n, la base du groupe d'homologie à n dimensions sur S^n, défini par rapport à l'anneau des entiers). Si l'on a une représentation $f(S_0^n) \subset S^n$ d'une sphère S_0^n dans une sphère S^n, le degré de la représentation n'est pas autre chose que le nombre d défini par $f(S_0^n) \sim d \cdot S^n$ (v.conférence précédente).

Si $f(S_0^n)$ est homotope à zéro, on aura $d = 0$. Réciproquement, nous nous proposons de démontrer le théorème suivant :

Théorème I. *Une représentation $f(S_0^n)$ d'une sphère S_0^n dans une sphère S^n, de degré topologique 0 (par rapport à l'anneau des entiers) est homotope à zéro.*

Ce théorème se démontre directement pour $n = 1$; dans ce cas, en effet, on a deux cercles C_0, C ; soient α, β, les arcs[4] sur ces deux cercles ; la représentation f s'exprimera pas une fonction $\beta = f(\alpha)$, et si d est le degré, on aura

$$f(\alpha + 2\pi) = f(\alpha) + 2d\pi$$

Si $d = 0$, f sera périodique, et la formule $f_t(\alpha) = t \cdot f(\alpha)$ définira une représentation de C_0 sur C, se réduisant à la représentation donnée pour $t = 1$, et à zéro pour $t = 0$. c.q.f.d.

Pour $n > 1$, on démontrera le théorème par récurrence sur n. Mais il est utile 4/5
d'abord d'en donner plusieurs énoncés tous équivalents.

Soit d'abord B_0^{n+1} la « boule » (« Vollkugel » [5]) à $n+1$ dimensions ayant pour frontière S_0^n dans un espace R^{n+1} où l'on aurait plongé S_0^n (c'est-à-dire, dans un tel espace, l'ensemble des points intérieurs à S_0^n ou situés sur S_0^n). Dire qu'une représentation de S_0^n, dans un espace quelconque, est homotope à zéro, c'est dire qu'on peut trouver $f_t(S_0^n)$ se réduisant à la transformation donnée pour $t = 1$, à un point pour $t = 0$; si nous considérons $f_t(S_0^n)$ comme une représentation de la sphère concentrique à S_0^n et de rayon t (S_0^n étant supposée de rayon 1), on voit que cette fonction définit une représentation de la boule B_0^{n+1} ; réciproquement, si l'on peut trouver une représentation de B_0^{n+1}, se réduisant sur S_0^n à une représentation donnée, il est clair que celle-ci sera homotope à zéro. Le théorème I peut donc être formulé comme suit :

Ia. *Une représentation de S_0^n sur S^n, de degré zéro, peut être prolongée à B_0^{n+1}.*

Sous cette forme, on peut encore transformer le théorème dans l'énoncé suivant :

Ib. *Une représentation de S_0^n dans $R^{n+1} - o$, d'ordre zéro par rapport à 0, peut être prolongée à B_0^{n+1}.*

5/6

En effet, soit, comme plus haut, $z = \varphi(x)$ le point de la sphère S^n de centre o et de rayon 1 qui se trouve sur ox, et ρ le logarithme du rayon vecteur du point x ; se donner une représentation $f(K)$ d'un complexe quelconque K dans $R^{n+1} - o$ équivaut à se donner une représentation $\varphi[f(K)]$ de K dans S^n, et une représentation $\rho[f(K)]$ de K dans la droite $-\infty < \rho < +\infty$. L'ordre de $f(S_0^n)$ par rapport à o dans $R^{n+1} - o$ n'est pas autre chose (v. conférence précédente) que le degré topologique de $\varphi[f(S_0^n)]$ dans S^n. Donc, si le théorème Ia est vrai, et si l'hypothèse de Ib est satisfaite, on peut prolonger à B_0^{n+1} la fonction $\varphi[f(S_0^n)]$; quant à la fonction $\rho[f(S_0^n)]$ on peut sûrement la prolonger aussi à B_0^{n+1}, puisque c'est une fonction à valeurs numériques : ce qui démontre Ib. D'autre part, Ia suit aussi Ib, car si $f(S_0^n)$ est une représentation de S_0^n dans S^n, de degré zéro, on peut aussi la considérer comme une représentation dans $R^{n+1} - o$, d'ordre 0, donc (si Ib est vrai) la prolonger en une représentation $f(B_0^{n+1})$ dans $R^{n+1} - o$; mais alors $\varphi[f(B_0^{n+1})]$ sera une représentation de B_0^{n+1} dans S^n qui prolonge $f(S_0^n)$, et Ia est démontré. On voit bien que Ia et Ib sont entièrement équivalents.

D'après les remarques faites plus haut, Ib peut encore s'énoncer comme suit : 6/7

1c. *Une représentation de S_0^n dans $R^{n+1} - o$, d'ordre zéro par rapport à 0, est homotope à zéro.*

Enfin, observons que, puisque $R^{n+1} - o$ est topologiquement identique à une sphère deux fois pointée $S^{n+1} - p - q$, on peut énoncer Ib et 1c pour une telle sphère, l'ordre par rapport à o devant être remplacé par l'ordre par rapport au couple de points (p, q).

Démontrons maintenant d'après Hopf les deux lemmes :

Lemme I. *Soient f, g, deux représentations d'un même espace compact F dans S^n ; supposons qu'il y ait un point p sur S^n, et un sous-ensemble fermé F' de F, tels que f et g coïncident sur $F - F'$, et que les images $f(F')$, $g(F')$ de F' par f et g ne contiennent pas p. Alors f et g sont homotopes.*

En effet, faisons une projection stéréographique de S^n sur R^n de façon que p aille à l'infini. Soit x un point de F' ; soit $f_t(x)$ le point de S^n tel que sa projection stéréographique divise le segment de droite déterminé dans R^n par les projections stéréographiques de $f(x)$, $g(x)$ dans le rapport $t/1-t$: avec les hypothèses du lemme, ce point est bien déterminé. Pour $x \subset F - F'$, on prendra $f_t(x) = f(x) = g(x)$. On
7/8 vérifie immédiatement que $f_t(x)$ est continue en x, t, et se réduit à f pour $t = 0$, à g pour $t = 1$.

Lemme II. *Soit f une représentation de S_0^n dans S^n et $n \geqslant 2$; soient p, q, deux points de S^n ; A, B, deux hémisphères sur S_0^n (de façon que S_0^n soit la réunion de A et B) ; alors on peut déformer f en une représentation g pour laquelle $g(A) \not\supset q$, $g(B) \not\supset p$.*

(On voit facilement que ce n'est pas exact pour $n = 1$). Tout d'abord, on remplace f par une approximation simpliciale (assez fine pour qu'elle soit homotope à f, cf. conférence d'Ehresmann), de façon que pour cette approximation, qu'on désignera de nouveau par f, $f^{-1}(p)$ et $f^{-1}(q)$ ne comprennent qu'un nombre fini de points ; on peut supposer évidemment aussi, par une déformation convenable de S_0^n en elle-même, que A n'a aucun point commun avec $f^{-1}(q)$. Soit alors x un point de $f^{-1}(p)$ qui ne soit pas dans A, x' un point intérieur à A ; joignons x à x' par une ligne L (image d'un segment) sans point commun avec $f^{-1}(q)$; soit V un voisinage de la ligne L, sans point commun avec $f^{-1}(q)$, et homéomorphe à un simplexe à n dimensions X^n ; d'après le lemme I, une représentation $g(S_0^n)$ dans S^n sera homotope à f pourvu
8/9 qu'elle coïncide avec f en dehors de $\overline{V}$, et que dans $\overline{V}$ elle ne prenne pas la valeur q : on obtiendra une telle fonction g à partir de f, par une déformation continue de $\overline{V}$ en lui-même qui laisse fixes tous les points frontières de $\overline{V}$ et qui amène x en x'.

Cela fait, on a g homotope à f, et telle que les points de $g^{-1}(q)$ et $g^{-1}(p)$ coïncident avec les points correspondants pour f à l'exception de l'un des points de $f^{-1}(p)$ qui a été remplacé par un point x' dans A. En continuant ainsi, on amènera un à un tous les points de $f^{-1}(p)$ dans A sans toucher à ceux de $f^{-1}(q)$, et le lemme est démontré (On remarquera que l'existence de la ligne L tenait à l'hypothèse $n \geqslant 2$).

On peut maintenant démontrer le théorème I : on le démontrera pour $n + 1$ en supposant le théorème Ib vrai pour n. Soit f une représentation de S_0^{n+1} dans S^{n+1}, de

degré zéro ; on peut supposer que f a été remplacée par une représentation homotope (qu'on appellera de nouveau f) satisfaisant aux conditions du lemme II : c'est-à-dire qu'on aura sur S^{n+1} deux points p, q et que S_0^{n+1} sera partagée par son « équateur » S_0^n en deux hémisphères A, B, de façon que $f(A) \not\supset q$, $f(B) \not\supset p$. Celà étant, on sait (v.conférence précédente) que le degré f est égal au degré local de f en un point quelconque de S^{n+1}, par exemple en p : celui-ci étant la somme des degrés, en ce point, de $f(A)$ et $f(B)$; ce dernier étant nul puisque $f(B) \not\supset p$, il en est de même de 9/10
$f(A)$: par définition de l'ordre, le degré de $f(A)$ en p est égal à l'odre de $f(S_0^n)$ par rapport au couple de points p, q ; celui-ci est donc nul ; mais alors on peut appliquer le théorème Ib pour la dimension n (dans sa forme relative à la sphère deux fois pointée $S^{n+1} - p - q$) : d'après ce théorème, la fonction $f(S_0^n)$, qui représente S_0^n dans $S^{n+1} - p - q$, avec l'ordre 0 par rapport à (p, q), peut être prolongée en une représentation g de A dans $S^{n+1} - p - q$, coïncidant avec f sur S_0^n ; prenons, de plus, $g = f$ dans B ; alors, d'après le lemme I, g est homotope à f. D'autre part, g est alors une représentation de S_0^{n+1} dans $S^{n+1} - p$, ou autrement dit dans un espace euclidien R^{n+1}, et est donc homotope à zéro : il en est donc de même de f. c.q.f.d.

2ème partie. Problèmes de prolongements relatifs aux représentations dans S^n

Soit K^{n+1} un complexe à $n+1$ dimensions ; $K_0 \subset K^{n+1}$ un complexe partiel composé d'éléments de K^{n+1} ; soit f une représentation de K_0 dans S^n, on va donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f puisse être prolongée au complexe K^{n+1}. 10/11

(On observera comme plus haut, que si, au lieu des représentations dans S^n, on étudiait les représentations dans $R^{n+1} - o$, on aurait un problème complètement équivalent à celui qui nous occupe. On remarquera, d'autre part, que si, au lieu d'un complexe K^{n+1}, on avait un complexe K^m à m dimensions, avec $m \leqslant n$, le problème serait trivial, le prolongement étant toujours possible : il suffit en effet de considérer le problème relatif aux représentations dans $R^{n+1} - o$; faisons le prolongement dans R^{n+1} d'une manière quelconque, ce qui est toujours possible : cela fait, une déformation infiniment petite nous permettra toujours d'éviter le point o).

Soit C^n un cycle à n dimensions sur K_0 (s'il en existe) formé en prenant pour domaine de définition de coefficients un groupe abélien quelconque G : supposons qu'il soit homologue à zéro *sur* R^{n+1} : alors, quelle que soit la représentation f de K^{n+1} dans S^n, on aura $f(C^n) \sim 0$ dans S^n avec le degré zéro : c'est donc là une condition nécessaire à laquelle doit satisfaire la fonction f, supposée donnée sur K_0, pour pouvoir être prolongée à K^{n+1} ; si d'ailleurs C^n est déjà ~ 0 sur K_0, la condition est identiquement satisfaite. Nous allons démontrer la réciproque, d'après Hopf, sous la forme suivante : 11/12

Théorème II. *Pour que la représentation f de K_0 dans S^n puisse être prolongée à K^{n+1}, il suffit que $f(C^n) \sim 0$ sur S^n quel que soit le cycle C^n sur K_0, formé soit avec l'anneau des entiers ordinaires, soit avec l'anneau des entiers* mod.m*, non homologue à zéro sur K_0 mais homologue à zéro sur K^{n+1}.*

On va s'appuyer sur le lemme suivant, qui vaut pour tous les problèmes de prolongement :

Lemme. *Soit $f(K_0)$ une représentation de K_0 dans un espace quelconque Q ; si l'on peut prolonger f à une représentation $f(K^{n+1})$ dans Q, l'on peut prolonger aussi à K^{n+1} toute représentation $g(K_0)$ homotope à $f(K_0)$.*

En effet, soit K^m le complexe formé par tous les éléments de K^{n+1} qui sont au plus à m dimensions ; on va démontrer qu'on peut prolonger g à K^m successivement pour $m = 0, 1, 2, \ldots,$ d'où il résultera le théorème pour $m = n + 1$. C'est évident pour $m = 0$, il suffit de définir arbitrairement g en tous les sommets de K^{n+1} qui n'appartiennent pas déjà à K_0. Supposons donc qu'on ait défini g sur K^m de façon que $g(K^m + K_0)$ soit homotope à $f(K^m + K_0)$; soit X^{m+1} un simplexe de K^{n+1}, à $m + 1$ dimensions, n'appartenant pas à K_0 ; on définira g dans X^{m+1} comme suit. Soit o un point intérieur à X^{m+1}, X'^{m+1} l'homothétique de X^{m+1} dans l'homothétie
12/13 de centre o et de rapport $1/2$: soit X' le point de X'^{m+1} correspondant, dans cette homothétie, à un point x de X^{m+1}, on définira g, dans X'^{m+1} par $g(x') = f(x)$; g se trouve ainsi déterminé sur la frontière de $X^{m+1} - X'^{m+1}$ (qui est homéomorphe au produit topologique de la frontière de X^{m+1} par un segment) une fonction se réduisant à g sur la frontière de X^{m+1}, à f sur la frontière de X'^{m+1} : nous prendrons g égal à cette fonction dans $X^{m+1} - X'^{m+1}$. G est ainsi défini dans K^{m+1}, ce qui démontre le lemme par récurrence sur m.

Passons maintenant au théorème II. Au lieu de S^n, nous raisonnerons (ce qui revient au même) sur la frontière $|\dot{X}^{n+1}|$ d'un simplexe X^{n+1} à $n+1$ dimensions ; f étant donnée sur K_0, f est homotope (v.exposé Ehresmann) à la représentation simpliciale, dans $|\dot{X}^{n+1}|$, d'une subdivision suffisamment fine de K_0 ; d'après le lemme, il suffit de raisonner sur celle-ci, qu'on appellera de nouveau f : autrement dit, nous supposons que f est une représentation simpliciale de K_0 dans $|\dot{X}^{n+1}|$. Soit K^m l'ensemble des éléments à au plus m dimensions de K^{n+1} : nous définirons f sur K^{n-1} en faisant correspondre à tout sommet de K^{n+1} un sommet arbitraire de X^{n+1}, et en prenant
13/14 f simpliciale sur K^{n-1}. Supposons un instant qu'on ait pu prolonger f à K^n, et essayons de faire le prolongement à K^{n+1}. Pour cela soit x^{n+1} un simplexe à $n+1$ dimensions de K^{n+1} : il s'agira, f étant donnée sur la frontière de x^{n+1}, de prolonger à x^{n+1} ; ce problème est identique à celui qui consiste à prolonger une fonction, donnée dans une sphère S_0^n, à la boule B_0^{n+1}, et qui a été traité dans la première partie : il faut et il suffit, pour que ce soit possible, que $f(\dot{x}^{n+1}) \sim 0$ sur $|\dot{X}^{n+1}|$. Le problème est donc ramené au suivant : f étant connue, sur K^{n-1} et sur K_0, définir f sur

K^n de façon qu'on ait $f(\dot{x}^{n+1}) \sim 0$ quel que soit x^{n+1} sur K^{n+1} ; ou encore z^n désignant n'importe quel complexe algébrique à n dimensions sur K^{n+1}, de façon que $f(z^n) \sim 0$ chaque fois que $z^n \sim 0$. Pour définir une telle fonction f (supposée donnée sur $K^{n-1}+K_0$) choisissons un simplexe Y^n (orienté) sur $|\dot{X}^{n+1}|$; et supposons qu'on sache déterminer une fonction $\chi(x^n)$ des simplexes à n dimensions (orientés) de K^{n+1}, prenant ses valeurs dans l'anneau des entiers ordinaires, et satisfaisant aux deux conditions suivantes :

1°– Si x^n appartient à K_0, $\chi(x^n)$ est égala au degré de $f(x^n)$ sur Y^n (c'est-à-dire, puisque f est simpliciale sur K_0, $\chi(x^n) = +1$, -1 ou 0 suivant que $f(x^n) = +Y^n$, $-Y^n$, ou $\neq \pm Y^n$) ; 14/15

2°– quel que soit le cycle $z^n = \sum_i c_i x_i^n$ (formé avec l'anneau des entiers) homologue à zéro sur K^{n+1}, on a

$$\chi(z^n) = \sum_i c_i \chi(x_i^n) = 0.$$

Dans ces conditions, soit x^n un simplexe de K^{n+1} à n dimensions, n'appartenant pas à K_0, et soit $\chi(x^n) = \pm k$, k étant entier et $\geqslant 0$; marquons, à l'intérieur de x^n, k petits simplexes (sans points communs deux à deux) : dans chacun de ceux-ci, définissons f comme une représentation simpliciale de ce simplexe sur Y^n, avec une orientation positive ou négative suivant que $\chi(x^n)$ est $>$ ou <0 ; dans tout le reste de x^n, définissons f de façon qu'elle n'y prenne que des valeurs appartenant à $\overline{\dot{X}}^{n+1} - \overline{Y}^n$ (ce qui est toujours possible, ce dernier ensemble étant homéomorphe à l'intérieur de la sphère). La fonction f ainsi définie satisfait aux conditions requises, car si z^n est un cycle ~ 0 sur K^{n+1}, le degré de $f(z^n)$ dans $|\dot{X}^{n+1}|$ est égal au degré local en un point intérieur de Y^n, et celui-ci n'est autre chose que $\chi(z^n) = 0$.

Tout se trouve donc ramené à la détermination de la fonction $\chi(x^n)$, et il ne reste plus qu'à faire voir que les hypothèses de l'énoncé permettent de trouver une telle fonction ; ces hypothèses peuvent d'ailleurs se formuler ainsi : quel que soit le cycle z^n sur K_0, ~ 0 (mod.m) sur K^{n+1} on a $\chi(z^n) = 0$ (mod.m) ; et cela, m étant 0 ou un 15/16 entier naturel quelconque. On est ainsi ramené à une question purement arithmétique, qui d'ailleurs ne présente pas de difficultés, et au sujet de laquelle nous renvoyons le lecteur à Hopf-Alexandroff.

Il est intéressant d'observer qu'au lieu de faire l'hypothèse de l'énoncé pour le cas de l'anneau des entiers mod.m quel que soit m, il revient au même de faire cette hypothèse pour un seul domaine de coefficients, à savoir le groupe des nombres rationnels (ou des nombres réels) modulo 1.

3ème partie.– Application aux classes de représentation

Puisque, pour décider si deux représentations $f(K^n)$ $f'(K^n)$ d'un complexe K^n dans la sphère S^n appartiennent à une même classe, il suffit de résoudre un problème de prolongement sur le produit topologique de K^n par un segment, les résultats précédents sont applicables. Soit donc K^{n+1} le produit de K^n par le segment $0 \leqslant t \leqslant 1$; soient K^n, K'^n les complexes partiels de K^{n+1} correspondant respectivement à $t = 0$ et à $t = 1$: il s'agit de savoir si l'on peut déterminer une représentation de K^{n+1}
16/17 dans S^n, se réduisant à f sur K^n et à f' sur K'^n. Soit z^n un cycle sur $K^n + K'^n$; il sera somme d'un complexe algébrique $-x'^n$ sur K'^n ; on doit avoir $\dot{x}^n - \dot{x}'^n = 0$, d'où, puisque K^n et K'^n sont sans point commun, $\dot{x}^n = \dot{x}'^n = 0$, c'est-à-dire que x^n et x'^n sont des cycles ; on vérifie immédiatement que pour que $z^n = x^n - x'^n \sim 0$ sur K^{n+1}, il faut et il suffit que x'^n, sur K'^n, appartienne à la classe d'homologie qui correspond à celle à laquelle appartient x^n sur K^n. L'application du théorème II donne alors :

Théorème III. *Pour que deux représentations f, f' de K^n dans S^n appartiennent à la même classe, il faut et il suffit que l'on ait, quel que soit le cycle x^n pris sur K^n par rapport à l'anneau des entiers ordinaires ou à celui des entiers* $\mathrm{mod}.m$, *$f(x^n) \sim f'(x^n)$ sur S^n ; ou autrement dit, que tout cycle x^n soit représenté, par f et par f', avec le même degré topologique sur S^n.*

On exprime ce théorème en disant que, lorsqu'il s'agit de représentations d'un complexe K^n à n dimensions dans S^n, la classe d'une représentation est entièrement déterminée par son type homologique.

En particulier, la classe d'une représentation de S^n dans S^n est complètement déterminée par son degré.[6]

17/18 En revanche, le type homologique ne suffit nullement en général pour déterminer la classe d'une représentation, et Hopf a montré que les résultats de la première partie ne peuvent être étendus au cas de deux sphères de dimensions quelconques ; plus précisément, il existe une représentation non homotope à zéro de S^{4n-1} sur S^{2n}, quel que soit n ; or, dans une telle représentation, tout cycle à $2n$ dimensions sur S^{4n-1} est homologue à zéro sur S^{4n-1} et est donc a fortiori représenté sur S^{2n} avec le degré zéro, de sorte que la représentation a même type homologique qu'une représentation homotope à zéro. Dans le cas $n = 1$ la représentation de Hopf peut se définir d'une manière très simple : comme on sait, S^3 est un espace de groupe, et à tout point s de S^3 il est possible de faire correspondre une rotation autour de o dans l'espace ordinaire R^3 ; soit A un point fixe sur la sphère S^2 de centre o dans R^3, P sont transformé par la rotation s : la transformation $(s \to P)$ constitue une représentation de S^3 dans S^2, et Hopf démontre qu'elle n'est pas homotope à zéro (cela résulte d'ailleurs aussi d'un théorème très général de Hurewicz, provenant de sa théorie des
18/19 groupes d'homotopie d'ordre supérieur).[7]

Bilbiographie. L'exposé ci-dessus a été fait d'après Hopf-Alexandroff. Sur la représentation de S^{4n-1} dans S^{2n} et le très intéressant problème lié à celui-là, des représentations de $S^n \times S^n$ dans S^n v. H.HOPF, Fundam.Math. t.25.[8]

Cf. aussi Freudentahl, Die Hopfsche Gruppe, Compos.Math. vol.2 ; et d'autre part les notes de Hurewicz sur sa théorie des groupes d'homotopie (Proc.Acad. Amsterdam 1935–36).

Notes

1. La référence principale pour cet exposé est le livre d'Alexandroff et Hopf [AH35]. La bibliographie mentionne aussi l'article [Hop35] de Hopf (voir les notes suivantes) ainsi que, pour la définition des groupes d'homotopie, l'article [Fre35] de Freudenthal et les quatre notes [Hur35a, Hur35b, Hur36a, Hur36b] de Hurewicz.
2. L'exposé, à venir, 3-I.
3. Dans le titre comme dans l'exposé, le mot représentation désigne une application (voie les notes de l'exposé 1-E). La notation $Y = f(X)$ désigne ce que nous écririons $f : X \to Y$.
4. Le mot arc désigne la longueur de l'arc (c'est-à-dire l'angle).
5. Voici l'apparition moderne de la boule et de son bord la sphère... jusque là « sphère » désignait ce que l'on appelle désormais une boule. Ici on a besoin des deux à la fois, il faut donc être précis !
6. En termes (à peine) plus modernes, $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$.
7. L'application $S^3 \to S^2$ décrite est la « fibration de Hopf » ; elle engendre le groupe $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$.
8. Le « très intéressant problème » est celui de l'existence d'applications $S^{4n-1} \to S^{2n}$ d'invariant de Hopf égal à 1. Elle ne sera résolue (par la négative, sauf les cas de S^2, S^4 et S^8) qu'à la fin des années 1950, par John Franck Adams [Ada60]. Voir ici page 102.

Quelques jours avant de faire son exposé, André Weil avait écrit une lettre à Élie Cartan dans laquelle, à propos du séminaire, il posait la question de l'invariant de Hopf 1. Cette lettre est conservée aux archives de l'Académie des sciences et reproduite dans [Aud11, p. 474].

Références

[Ada60] J. F. Adams – « On the non-existence of elements of Hopf invariant one », *Ann. Math.* **72** (1960), p. 20–104.

[AH35] P. Alexandroff & H. Hopf – *Topologie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[Aud11] M. Audin – *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil*, Documents mathématiques, Société mathématique de France, Paris, 2011.

[Fre35] H. Freudenthal – « Die Hopfsche Gruppe, eine topologische Begründung kombinatorischer Begriffe. », *Compos. Math.* **2** (1935), p. 134–162.

[Hop35] H. Hopf – « Über die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. », *Fundam. Math.* **25** (1935), p. 427–440.

[Hur35a] W. Hurewicz – « Beiträge zur Topologie der Deformationen. I. Höherdimensionale Homotopiegruppen », *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **38** (1935), p. 112–119.

[Hur35b] ______, « Beiträge zur Topologie der Deformationen II. Homotopie- und Homologiegruppen », *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **38** (1935), p. 521–528.

[Hur36a] ______, « Beiträge zur Topologie der Deformationen. III. Klassen und Homologietypen von Abbildungen », *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **39** (1936), p. 117–126.

[Hur36b] ______, « Beiträge zur Topologie der Deformationen. IV. Asphärische Räume », *Proc. Akad. Wet. Amsterdam* **39** (1936), p. 215–224.