André Weil

Nombres d'intersection et degré topologique

Séminaire de mathématiques (1935-1936), Exposé 3-F, 15 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1935-1936__3__F_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 3 février 1936
Exposé 3-F, p. 1 à 15

NOMBRES D'INTERSECTION ET DEGRÉ TOPOLOGIQUE

par **André Weil**

1.–. On donnera[1] d'abord quelques définitions générales se rapportant à la terminologie de Hopf-Alexandroff qui sera suivie ici.

Un complexe (« abstrait ») est, comme dans les exposés antérieurs, un ensemble d'éléments (« cellules », éventuellement « simplexes »), avec des relations d'incidence ; il est dit « *euclidien* » si les éléments sont des cellules convexes de E^n, toute face d'une cellule appartenant encore au complexe, et chaque ensemble borné dans E^n n'ayant de points communs qu'avec un nombre fini d'éléments. Un *complexe courbe* est un complexe qui se déduit d'un complexe euclidien par une transformation topologique portant sur la réunion de ses cellules (autrement dit, ses éléments sont les images de ceux du complexe euclidien par cette transformation).[2]

On dit d'autre part qu'on a défini un « *domaine de sommets* » (Eckpunktbereich) si l'on s'est donné un ensemble A de points et une famille de sous-ensembles finis $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de A, de telle sorte que toute partie d'un tel ensemble soit encore un élément de la famille, et si à tout élément $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ de la famille on fait correspondre un objet qui sera appelé le simplexe $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$.

Exemples. A = ensemble des sommets d'un complexe (abstrait) simplicial fini, les sous-ensembles étant ceux formés des sommets d'un même simplexe de A. Ou encore : 1/2
A = espace métrique quelconque, les sous-ensembles étant tous les sous-ensembles finis de diamètre $< \varepsilon$. Ou A = un domaine D dans l'espace euclidien E^n, les sous-ensembles $(a_0, a_1, \ldots, a_r)$ étant tous ceux pour lesquels le simplexe euclidien de sommets $a_0, a_1, \ldots, a_r$ a tous ses points contenus dans D. Etc...

Sur un complexe simplicial, on dit qu'un simplexe, défini par ses sommets, est orienté, si l'on s'est donné un ordre des sommets (défini à une permutation paire près) ; la frontière d'un tel simplexe se définit comme dans Chevalley (exposé D p.6) ; les éléments d'un complexe normal (ib. p.7) seront dits orientés si l'on a défini pour eux une fonction frontière (ib. p.8).

Sur un complexe K, simplicial ou normal, on appellera « *complexe algébrique* » C^r une combinaison linéaire, à coefficients dans un groupe abélien G, d'éléments de

K à r dimensions en nombre fini ; la frontière de C^r se note $\dot{C}^r$, c'est un complexe algébrique à $r-1$ dimensions. On note $|C^r|$ le plus petit sous-complexe de K qui contienne parmi ses éléments tous les éléments de K qui ont dans C^r (mis sous forme réduite) un coefficient non nul.

Si l'on suppose réalisée sous forme de complexe euclidien, une subdivision K' de K (par ex. la subdivision régulière), de sorte qu'à tout élément de K corresponde
2/3 une réunion de cellules de K', on notera $\overline{C}^r$ la réunion, dans K', de toutes les cellules correspondant aux éléments de $|C^r|$. La réunion de toutes les cellules de K' s'appellera le *polyèdre* $\overline{K}$.

Si alors, on définit sur $\overline{C}^r$ une fonction continue f réalisant une image de $\overline{C}^r$ dans un espace topologique quelconque, on dira que $f(C^r)$ est un *complexe continu* (algébrique) dans cet espace. Sa frontière est $f(\dot{C}^r)$. $f(C^r)$ et $f'(C'^r)$ seront considérés comme identiques lorsque les complexes $|C^r|$ et $|C'^r|$ sont isomorphes et que, de plus, il existe un isomorphisme de $|C^r|$ sur $|C'^r|$ qui transforme C^r en C'^r et tel que la correspondance simpliciale entre $\overline{C}^r$ et $\overline{C}'^r$ qui est définie par cet isomorphisme transforme f en f'. La somme de deux complexes $f(C^r)$, $f'(C'^r)$, s'obtiendra en considérant $|C^r|$ et $|C'^r|$ comme étrangers l'un à l'autre, et définissant une fonction F comme égale à f sur le premier, à f' sur le second. On posera

$$f(C^r) + f'(C'^r) = F(C^r + C'^r).$$

Avec cette définition, $f(C) - f(C)$ sera un complexe continu image d'un complexe algébrique pris sur la somme de deux complexes isomorphes à C et ne sera pas nul ; il le deviendrait en introduisant une notion d'équivalence convenable, ce dont nous
3/4 nous dispenserons (suivant l'exemple d'Alexander-Hopf).[3]

Enfin, on appelle *cycle* un complexe algébrique dont la frontière est nulle. Toute frontière est un cycle : c'est par définition un cycle homologue à zéro. L'ensemble des cycles homologues à un même cycle (c'est-à-dire tels que la différence soit homologue à zéro) forme une classe d'homologie. Les cycles continus ne forment pas un groupe (pour l'addition telle qu'elle a été définie) mais leurs classes d'homologie en forment un, et cela suffit pour ce qui va suivre, car toutes les quantités que nous considérerons sont des invariants d'homologie.

2.–. Dans un espace à n dimensions, il est naturel de présumer que si $p+q=n$, deux variétés à p et q dimensions respectivement auront « en général » pour intersection un certain nombre de points, et de chercher à définir d'une manière purement topologique, la multiplicité qui doit être attribuée à chacun des points d'intersection, et par suite, le nombre total d'intersections des deux variétés.[4] Il semble qu'on puisse définir une telle notion dans tout l'espace où le voisinage de chaque point est homéomorphe à l'intérieur d'une sphère, ou du moins possède, ainsi que sa frontière, les caractères d'homologie d'une sphère.

Dans cet exposé, nous supposerons que l'espace étudié est un polyèdre $\overline{X}^n$ défini par un complexe X^n qui soit une *variété orientable à n dimensions* (définition de Chevalley, p.10-11). Si K^n possède les caractères d'homologie de la sphère S^n à n 4/5
dimensions, on dira que $\overline{K}^n$ est une *homosphère*.[5] Nos définitions vaudront en particulier pour la sphère S^n, et pour l'espace euclidien E^n qui n'est autre qu'une sphère pointée.[6]

Soient donc, sur une telle variété, deux complexes algébriques C^p, D^q, à p et q dimensions $(p+q=n)$ (ce pourront être des complexes continus) ; ce seront des combinaisons d'éléments pris avec des coefficients qui seront supposés appartenir respectivement à deux groupes G, G'. On désignera par (C^p, D^q) leur *nombre d'intersection* (parfois appelé indice de Kronecker) ; (il est noté (C^p, D^q) dans Alexandroff-Hopf) chaque fois qu'il sera défini, sa valeur sera un élément d'un groupe abélien G''. On est conduit à attribuer à ce nombre les propriétés suivantes (intuitives sauf la troisième, dont l'origine véritable est à rechercher dans la théorie des intégrales multiples) :[7]

a) (C^p, D^q) s'annule chaque fois que les ensembles de points $\overline{C}^p$, $\overline{D}^q$ sont sans points commun (c'est-à-dire ont une intersection vide au sens géométrique du mot).

b) (C^p, D^q) dépend linéairement de C^p et de D^q.

c) On a, chaque fois que les membres sont définis :

$$(C^p, D^q) = (-1)^{pq}(D^q, C^p) \qquad (p+q=n) \tag{I}$$

$$(\dot{C}^r, D^s) = (-1)^r(C^r, \dot{D}^s) \qquad (r+s=n+1) \tag{II}$$

5/6

Pour satisfaire à ces conditions, nous nous donnerons d'abord une fonction bilinéaire (α, β) des éléments α de G et des éléments β de G', prenant ses valeurs dans G''. Les cas les plus importants sont les suivants :

1.– $G = G''$ est un groupe abélien, G' est l'anneau des entiers $(\alpha, n) = n\alpha$.

2.– $G = G' = G''$ est un anneau, (α, β) le produit dans cet anneau.

3.– G et G' sont des groupes de caractères l'un de l'autre, G'' le groupe des nombres réels mod.1, (α, β) la fonction qui définit la dualité entre G et G' (fonction $\varphi(\alpha, \beta)$ dans Chevalley, p.2).

Cela posé, nous allons considérer deux cas :

1°– Sur une variété orientable K^n, on supposera d'abord que C^p, D^q, sont des complexes algébriques formés respectivement avec des éléments de K^n et du complexe dual $\overset{*}{K}{}^n$; autrement dit, on aura :

$$C^p = \sum_i \alpha_i E_i^p, \qquad D^q = \sum_j \beta_j \overset{*}{E}{}_j^q$$

Puisque $p+q=n$, $\overset{*}{E}{}^q_j$ est duale de E^q_j et est sans point commun avec E^p_i sauf si $i=j$. On satisfera donc à a) en posant

$$(E^p_i, \overset{*}{E}{}^q_j) = \delta_{ij}$$

6/7 et, conformément à b)

$$(C^p, D^q) = \sum_i (\alpha_i, \beta_i)$$

(I) n'a pas de sens pour l'instant. Mais (II), dans ces conditions, équivaut à la propriété fondamentale des variétés orientables, à savoir que les coefficients η^p_{ij} qui définissent la fonction frontière sont les mêmes pour K^n et pour $\overset{*}{K}{}^n$ (propriété énoncée par Chevalley p.11 ; la démonstration, d'ailleurs délicate, dans Lefschetz Topology, pp.135–139).

La fonction (C^p, D^q) est d'ailleurs identique, aux notations près, à la fonction f_r, au moyen de laquelle a été démontré (Chevalley, p.12) le théorème de dualité de Poincaré.

2°– Dans l'espace euclidien E^n, on supposera que $|C^p|$, $|D^q|$ sont des complexes formés de simplexes simpliciaux euclidiens, en position générique l'un par rapport à l'autre ; on entend par là, que si S^p, T^q sont deux simplexes de $|C^p|$, $|D^q|$, ou bien ils n'ont pas de points communs, ou bien, aucun groupement de $n+1$ points parmi leurs $p+q+2=n+2$ sommets n'est dans un même plan (on peut toujours, par un déplacement infiniment petit, amener deux complexes à être en position générique). Dans ces conditions, on posera $(S^p, T^q) = 0$, si
7/8 ces simplexes sont sans point commun ; dans le cas contraire, ils se couperont en un point O intérieur à tous deux ; construisons, dans la variété linéaire qui porte S^p, un simplexe $Oa_1a_2\dots a_p$ orienté comme S^p ; dans celle qui porte T^q, $0b_1b_2\dots b_q$ orienté comme T^q ; on posera $(S^p, T^q) = +1$ ou -1 selon que le simplexe $0a_1\dots, a_p, 0b_1\dots b_q$ est orienté positivement ou négativement dans E^n. Si on a alors

$$C^p = \sum_i \alpha_i S_i, \qquad D^q = \sum_j \beta_j T^q_j$$

on posera :

$$(C^p, D^q) = \sum (\alpha_i, \beta_j) \cdot (S^p_i, T^q_j).$$

a) et b) sont évidents, quant à (I) et (II), il suffit de les vérifier pour des simplexes S^p, T^q qui se coupent. (I) est à peu près évident, (II) se vérifie élémentairement (Hopf-Alexandroff, pp.414-15).

Dans les deux cas, le nombre (C^p, D^q) ainsi défini peut être étendu à deux complexes *continus* quelconques, pourvu que chacun d'eux soit sans point commun avec la frontière de l'autre (plus précisément, que $\overline{\dot{C}^p} \cap \overline{D}^q = \overline{C}^p \cap \overline{\dot{D}^q} = 0$).[8] Occupons-nous d'abord de E^n, où la démonstration est plus facile.

Soient C^p, D^q, deux tels complexes : on peut, au besoin après subdivision, les déformer en deux complexes simpliciaux formés de simplexes euclidiens en position générique, C'^p, D'^q ; par définition, on posera $(C^p, D^q) = (C'^p, D'^q)$. Reste à mon- 8/9
trer que le second membre est indépendant de l'approximation simpliciale utilisée ; considérons-en donc une autre C''^p, D''^q appartenant à la même subdivision (il est évident, d'ailleurs, que (C'^p, D'^q) ne change pas par subdivision de C'^p, D'^q.)

Par construction, $\dot{C}''^p$ est homologue (et même homotope) à $\dot{C}'^p$ dans un voisinage de $\dot{C}^p$ qu'on peut supposer sans point commun avec $\dot{D}^q$, $\dot{D}'^q$, $\dot{D}''^q$; soit donc, dans ce voisinage, $\dot{C}'^p - \dot{C}''^p = \dot{E}^p$; alors : $C'^p - C''^p = E^p$ est homologue (et même homotope) à zéro dans un voisinage de C^p, qu'on peut supposer sans point commun avec D^q, D'^q ; soit, dans ce voisinage, $C'^p - C''^p - E^p = \dot{F}^{p+1}$. On aura donc $(E^p, D'^q) = 0$, et d'autre part,

$$(C'^p - C''^p - E^p, D'^q) = (\dot{F}^{p+1}, D'^q) = \pm(F^{p+1}, \dot{D}'^q) = 0$$

d'où

$$(C'^p, D'^q) = (C''^p, D'^q)$$

et de même

$$(C''^p, D'^q) = (C''^p, D''^q).$$

Le raisonnement n'utilise d'ailleurs que les propriétés a) et b) et c_{II}) ; il est clair qu'on en déduit de même le théorème général suivant :

Théorème I. *On aura $(C^p, D^q) = (C'^p, D^q)$ chaque fois que C^p et C'^p satisfont dans le complémentaire $\complement\dot{\overline{D}}^q$ de $\dot{\overline{D}}^q$ à l'homologie modulaire (au sens de Lefschetz)*

$$C^p \sim C'^p \quad (mod. \complement\overline{D}^q)$$

c'est-à-dire chaque fois qu'il existe E^p sans point commun avec $\overline{D}^q$ et F^{p+1} sans point commun avec $\dot{\overline{D}}^q$ tels que l'on ait $C^p - C'^p = E^p + \dot{F}^{p+1}$, pourvu que l'on soit assuré de pouvoir choisir E^p, F^{p+1}, parmi les complexes pour lesquels ce nombre possède les propriétés a), b), c_{II}).

En particulier, le théorème I peut dès maintenant être considéré comme établi sans aucune restriction pour les complexes continus de E^n, on passe facilement aux variétés orientables *localement euclidiennes* (tout voisinage est homéomorphe à une sphère). Pour une variété (combinatoire) orientable quelconque K^n, soient C^p, D^q, deux complexes continus, la frontière de chacun étant sans point commun avec l'autre. Soit K'^n une subdivision de K^n, suffisamment fine pour que les opérations qui vont être faites aient un sens. Soit L^n le complexe obtenu en retranchant de K'^n toutes les cellules qui ont des points communs avec $\dot{D}^q$, L'^n le complexe obtenu en retranchant de L^n toutes les cellules qui ont des points communs avec D^q. Par sa nature même, C^p sera un cycle dans L^n modulo L'^n ; d'après les propriétés des complexes normaux, on peut trouver un cycle C'^p modulo L'^n du *complexe* L^n tel que $C'^p \sim C^p$ (mod.L'^n). De même, on définira, à partir de D^q et du *complexe* $\overset{*}{K}{}'^n$ *dual de* K'^n un cycle relatif D'^q 10/11 qui sera un complexe de $\overset{*}{K}'^n$. On posera alors par définition $(C^p, D^q) = (C'^p, D'^q)$, et ce nombre, e'^n étant fixé, sera entièrement déterminé en vertu du théorème I. Pour faire voir qu'il ne dépend pas de K'^n, il suffira de montrer que si C^p, D^q sont des complexes de K^n, $\overset{*}{K}^n$ respectivement, leur nombre d'intersection (C^p, D^q) défini au moyen de K^n ne diffère pas du nombre d'intersection $(C^p, D^q)'$ défini au moyen de K'^n. Il est facile de voir qu'il en est bien ainsi quand p (ou q) s'annule ; plus précisément, soit $q = 0$, $p = n$; il suffit de considérer le cas où D se réduit à un seul terme, $D = \beta o$, o n'étant pas sur $\dot{C}^n$. On constate aussitôt que, si K^n désigne le complexe algébrique qui est la base d'homologie pour la dimension n de $\overline{K}^n$ (on sait, en effet, que le nombre de Betti correspondant est par définition $= 1$) il existe un élément α de G bien défini par l'homologie $C^n \sim \alpha K^n$ (mod.$\overline{K}^n - o$), et qu'on aura alors $(C^n, \beta o) = (\alpha, \beta)$; et cela, indépendamment du choix de K'^n. On va alors démontrer le théorème suivant :

Théorème II. *Supposons que le nombre d'intersection ait été défini, soit pour tous les couples de complexes C^p, D^q, appartenant respectivement à K^n et $\overset{*}{K}^n$, soit pour tous les complexes continus C^p, D^q, tel que la frontière de chacun soit san point commun*
11/12 *avec l'autre. Supposons que ce nombre satisfasse aux conditions a), b), c_{II}), et que l'on ait $(\alpha K^n, \beta o) = (\alpha, \beta)$. Dans ces conditions, le nombre d'intersection est déterminé d'une manière unique.*

Démonstration par récurrence sur q.

Il suffira de démontrer qu'on peut exprimer les nombres d'intersection relatifs aux dimensions (p, q) au moyen de nombres pour $(p+1, q-1)$. Dans le cas où les C^p, D^q sont supposés sur K^n, $\overset{*}{K}^n$, il suffit d'envisager le cas où ce sont des multiples de deux cellules E^p, $\overset{*}{E}^q$, duales l'une de l'autre. Dans le cas des complexes continus, on peut, par la construction faite plus haut, et qui implique seulement le théorème I, c'est-à-dire les propriétés a), b), c_{II}), se ramener au cas de deux complexes pris sur une subdivision K'^n et la duale $\overset{*}{K}'^n$, donc envisager le cas des multiples de deux cellules E^p, $\overset{*}{E}^q$, duales l'une de l'autre pour cette subdivision. Raisonnons par exemple dans le premier cas : on a à calculer $(\alpha E^p, \beta \overset{*}{E}^q)$; soit F^{p+1} l'une des cellules de K^n qui a E^p sur sa frontière : on peut la supposer orientée de manière que son complexe frontière $\dot{F}^{p+1}$ contienne E^p avec le coefficient $+1$; cette frontière se compose alors de E^p et de cellules sans point commun avec $\overset{*}{E}^q$, d'où

$$(\alpha E^p, \beta \overset{*}{E}^q) = (\alpha \dot{F}^{p+1}, \beta \overset{*}{E}^q) = (-1)^{p+1} (\alpha F^{p+1}, \beta \dot{\overset{*}{E}}{}^q)$$

on est bien ramené à un nombre d'intersection relatif aux dimensions $(p+1, q-1)$,
12/13 et le théorème est démontré.

En même temps, on voit que le nombre d'intersection est invariant par rapport aux transformations topologiques de la variété $\overline{K}^n$ en elle-même qui transforment en lui-même le *cycle* K^n (la base d'homologie), et change de signe par celles qui le transforment en $-K^n$.

La même démonstration par récurrence permet d'établir pour q quelconque, la formule $\mathrm{c_I}$), évidente pour $q = 0$ et qui n'avait pas été vérifiée pour le cas d'une variété $\overline{K}^n$.

3.–. Le théorème I maintenant acquis pour des complexes continus, possède l'important cas particulier suivant :

C^p, D^q étant des cycles, le nombre d'intersection (C^p, D^q) ne change pas si on les remplace par des cycles homologues. En particulier, si G et G' sont groupes de caractères l'un de l'autre, (C^p, D^q) n'est pas autre chose que la fonction bilinéaire des éléments des groupes de Betti à p dimensions qui définit la dualité entre ces groupes.

Le théorème I a encore l'importante conséquence que voici :

Le nombre d'intersection (C^p, D^q) ne change pas si l'on déforme d'une manière continue les complexes C^p, D^q, de telle façon qu'à aucun moment la frontière de l'un n'ait de point commun avec l'autre. 13/14

Il suffit de le vérifier pour une déformation suffisamment petite : mais alors cela est un cas particulier du théorème I (cf. la démonstration de celui-ci).

4.–. La formule $\mathrm{c_{II}}$) montre que le nombre

$$(C^r, \dot{D}^s) = \pm(\dot{C}^r, D^s)$$

ne change pas (comme on le voit sur le second membre) si on remplace C^r par un cycle quelconque D'^r ayant même frontière, ni (comme on le voit sur le premier membre) si on remplace D^s par D'^s tel que $\dot{D}^s = \dot{D}'^s$. C'est donc une fonction des deux cycles homologues à zéro $\dot{C}^r$, $\dot{D}^s$: par définition, on appelle ce nombre le *coefficient d'enlacement* des deux cycles ; on le note :

$$e(\dot{C}^r, \dot{D}^s) = (C^r, \dot{D}^s) = (-1)^r(\dot{C}^r, D^s)$$

(noté par vgothique dans Hopf-Alexandroff ; par Lc dans Lefschetz).[9]

Ce nombre est défini pour tout couple de cycles *homologues à zéro, sans point commun*, et dont la somme des dimensions est $n-1$. On a, pour deux tels cycles A^h, B^k $(h + k = n - 1)$

$$e(A^h, B^k) = (-1)^{hk+1} \cdot e(B^k, A^h)$$

comme il résulte immédiatement de $\mathrm{c_I}$) et $\mathrm{c_{II}}$). 14/15

En particulier, le coefficient d'enlacement est toujours défini pour deux cycles A^h, B^k $(h + k = n - 1)$ sans point commun sur une homosphère H^n, pourvu que h et k soient non nuls, puisque les nombres de Betti correspondants sont nuls ; il est défini aussi, sur une homosphère, pour A^{n-1} quelconque et $B^0 = o - o'$ (complexe à 0 dimensions formé de la différence de deux points). Il est toujours défini dans l'espace euclidien E^n si l'on convient de regarder un complexe formé d'un point o comme la différence $o - \infty$, de ce point et du point ∞ sur la sphère S^n, projection stéréographique de E^n (ceci revient à considérer E^n comme une sphère S^n prise modulo le point ∞, conformément au point de vue de Lefschetz).

Le théorème I et ses conséquences entraînent ici divers théorèmes d'invariance.

Le coefficient $e(A^h, B^k)$ *ne change pas si l'on remplace* A^h *par un cycle* A'^h, *homologue à* A^h *dans le domaine* $\complement B^k$ *complémentaire de* B^k.

En particulier, on peut, simultanément, remplacer les deux cycles par des cycles qui leur soient respectivement homologues dans deux domaines sans point commun. C'est là ce qui permet, G et G' étant en dualité l'un avec l'autre, de définir au moyen du coefficient d'enlacement une fonction bilinéaire des éléments du groupe de Betti à h
15/16 dimensions d'un ensemble fermé d'une part, de ceux du groupe de Betti à $k = n-h-1$ dimensions du domaine ouvert complémentaire d'autre part, d'où les théorèmes de dualité d'Alexander (cf. Chevalley, exposés D et E.)

Le coefficient d'enlacement ne change pas par déformation continue de deux cycles, pourvu que les deux cycles n'aient à aucun moment de points communs (il n'est pas exclu en revanche, que chacun des deux cycles vienne à se traverser lui-même au cours de la transformation).

Un théorème intéressant relie les nombres d'intersection dans une variété à n dimensions avec les coefficients d'enlacement sur des variétés à $n-1$ dimensions. Soit Z^n un hémisphère sur la sphère à n dimensions $\widehat{Z}^n$ l'autre hémisphère, F^{n-1} leur frontière commune ; soient, sur Z^n, deux cycles C^p, D^q *modulo* F^{n-1}, c'est-à-dire deux complexes dont les frontières $\dot{C}^p$, $\dot{D}^q$ se trouvent sur F^{n-1} ; supposons que $\dot{C}^p$, $\dot{D}^q$ soient sans point commun. Dans ce cas, (si les sphères sont convenablement orientées) *le nombre d'intersection* (C^p, D^q) *pris sur* Z^n *est égal au coefficient d'enlacement* $e(\dot{C}^p, \dot{D}^q)$ *pris sur* F^{n-1}. Soit, en effet, $\widehat{C}^p$ le complexe symétrique de C^p par rapport au plan de F^{n-1} : il a même frontière que C^p, donc $C^p - \widehat{C}^p$ est un cycle ; soit d'autre part D'^q un complexe sur F^{n-1} ayant même frontière que D^q ; on vérifie aussitôt que

$$(C^p, D^q) = (C^p - \widehat{C}^p, D^q) = (C^p - \widehat{C}^p, D'^q).$$

16/17 reste à montrer que ce dernier nombre d'intersection, pris sur la sphère $Z^n + \widehat{Z}^n$ est égal au signe près, au nombre d'intersection $(\dot{C}^p, D'^q)$ pris sur F^{n-1} : c'est ce qu'on vérifie facilement en remplaçant les complexes étudiés par des approximations simpliciales convenables, en position générique et examinant séparément chaque point d'intersection. En réalité, ce théorème (dont nous ne nous servirons pas) est valable dans des conditions beaucoup plus générales ; il ne suppose guère (à part la possibilité de définir les nombres d'intersection et coefficients d'enlacement qui interviennent) que le fait suivant : tout cycle modulo F^{n-1} dans Z^n est homologue à zéro modulo F^{n-1}. Il s'applique en particulier à toute « cellule combinatoire » au sens de Alexandroff-Hopf (Chap.VI, parg.1, n°7, p.245 ; cf.ib. Chap.IV, parg.6, n°8-9).

On peut en faire le point de départ d'une définition des nombres d'intersection procédant par récurrence suivant n, qui aurait sans doute une portée plus grande que celles actuellement en usage, et d'où découlerait en tout cas une démonstration d'invariance topologique (cette méthode est en germe dans Lefschetz, chap.IV, parg.6 : v. en particulier n°58).

5.–.Désormais, nous nous intéresserons exclusivement au cas où l'un des complexes dont on s'occupe est à zéro dimensions : le groupe de coefficients correspondants sera à peu près toujours l'anneau des entiers, l'autre groupe étant quelconque, ou bien 17/18
l'anneau des entiers modulo m, les deux groupes coïncident.

o étant un point, on désigne aussi par o le complexe algébrique défini par le point o pris avec le coefficient $+1$. Le nombre d'inetrsection (C^n, o) s'appelle, par définition, le *degré topologique* (on dit aussi « degré brouwérien », expression qui prête peut-être moins à confusion) du complexe C^n au point o : il est défini chaque fois que o n'est pas sur la frontière $\dot{C}^n$. *Il ne change pas :*

1°– *si on remplace* C^n *par un complexe homologue modulo* $\overline{K}^n - o$

2°– en particulier, *si on déforme* C^n *sans que* $\dot{C}^n$ *vienne* passer par o ;

3° si on déplace o sans rencontrer $\dot{C}^n$, c'est-à-dire qu'*il est constant dans chacune des composantes connexes de* $\overline{K}^n - \dot{C}^n$.

On peut d'ailleurs étendre la définition du degré topologique au cas où l'on se trouve placé sur un complexe L^n *quelconque* à n dimensions (et non plus sur une variété orientable) par le *principe de localisation* suivant :

Soit C^n un complexe (algébrique continu) à n dimensions sur L^n, o un *point intérieur à un simplexe* Σ^n *de* L^n, et non situé sur $\dot{C}^n$; *identifions ensemble* tous les points de L^n qui ne sont pas intérieurs à Σ^n ; L^n devient une sphère, C^n devient un complexe sur cette sphère ; son degré en o sera par définition le degré de C^n en o sur 18/19
L^n (il revient au même de tout considérer, sur L^n, modulo le complexe L'^n obtenu en retranchant de L^n le seul simplexe Σ^n). Il est clair dans ces conditions que le degré de C^n en o ne change pas par déformation comme plus haut ; en particulier, si C^n est un cycle, il ne change pas si on remplace C^n par un cycle homologue et il reste constant sur chaque simplexe Σ^n de L^n : il est égal au coefficient de Σ^n dans le cycle du complexe L^n qui est homologue à C^n.

En particulier, si on revient à une variété orientable $\overline{K}^n$, si on désigne (comme plus haut) par K^n le cycle qui est base d'homologie sur cette variété pour la dimension n, ce cycle contient tous les simplexes Σ^n avec le coefficient $+1$; et conformément d'ailleurs à ce qui avait été vu plus haut, *le degré topologique* $\alpha = (C^n, o)$ *est indépendant* de o et égal au nombre défini par l'homologie $C^n \sim \alpha K^n$. Si, en particulier, C^n est un cycle continu, image par une fonction f de la base d'homologie M^n sur une deuxième variété orientable $\overline{M}^n$, le degré α est complètement défini si l'on se donne l'orientation positive sur chacune de ces variétés : on dit que c'est le degré de la représentation f : c'est cette notion (Abbildungsgrad) qui est à l'origine de la théorie.

Il est très remarquable que le degré topologique puisse ainsi être défini, d'une 19/20
part, comme caractère d'homologie, d'autre part, comme invariant topologique *local*

(C^n, o) se rapportant au *voisinage* d'un point o (cf. les observations de Alexandroff-Hopf, chap.XII, parg.4, n°5). Ce double aspect conduit en particulier aux deux théorèmes suivants, tous deux très utiles dans le calcul du degré topologique (cf. Leray, exposé B) :[10]

1°. *Soit C^n un cycle sur $\overline{K}^n$, possédant sur K^n le degré topologique $\alpha = (C^n, o)$; soit f une représentation de $\overline{K}^n$ dans une autre variété orientable $\overline{K}^n$, possédant le degré topologique δ ; alors l'image $f(C^n)$ du cycle C^n sur M^n aura sur M^n le degré $\alpha\delta$.*

Car on a $C^n \sim \alpha K^n$, d'où $f(C^n) \sim \alpha f(K^n)$ et d'autre part, $f(K^n) \sim \delta M^n$.

2°. *Soit $C^n = f(Z^n)$ un cycle continu sur un complexe L^n quelconque ; soit o un point intérieur à un simplexe de L^n ; supposons qu'il y ait un seul point z de $\overline{Z}^n$ tel que $f(z) = 0$, que ce points soit intérieur à un simplexe à n dimensions de Z^n, et que f établisse une correspondance topologique entre un voisinage de z et un voisinage de o. Alors : $(C^n, o) = \pm 1$.*[11]

Ce serait évident si f était une représentation simpliciale. Dans le cas général, on
20/21 se servira de la méthode de Leray.

On voit immédiatement qu'on peut, sur L^n d'une part, sur Z^n d'autre part, identifier à un même point tout ce qui se trouve en dehors de deux sphères (ou simplexes) aussi petites que l'on veut, entourant o et z respectivement : on est donc amené à démontrer le théorème pour le cas où Z^n et L^n sont deux sphères, la représentation f de Z^n dans L^n étant localement topologique au voisinage d'un certain point.

Soit dans un voisinage de o où f est topologique $g = f^{-1}$ la transformation inverse ; représentons L^n sur E^n, o étant envoyé à l'infini, et Z^n sur un second espace euclidien E'^n, z étant envoyé à l'infini : g devient alors une fonction, à valeurs dans E'^n, définie au voisinage de l'infini dans E^n ; on pourra alors (cf.Leray ib.) compléter la définition de cette fonction partout à distance finie. Revenons aux sphères Z^n, L^n : on a maintenant une représentation f de Z^n dans L^n et une g de L^n dans Z^n ; fg est une représentation de Z^n dans Z^n, qui, au *voisinage de z*, est la représentation *identique*. Par approximation simpliciale, on constate aussitôt que le degré de fg en z est $+1$, donc le degré de f et celui de g (pris au moyen de l'anneau des entiers) est ± 1.

De la combinaison des théorèmes 1° et 2° résulte que le degré topologique local, au signe près, est un *invariant topologique local*, c'est-à-dire est invariant par toute
21/22 transformation *localement topologique*.

6.–. Plaçons-nous maintenant dans E^n (on pourrait, plus généralement, prendre un homosimplexe, c'est-à-dire un complexe ayant les propriétés d'homologie d'un simplexe). Rappelons que, par définition, le coefficient d'enlacement $e(A^{n-1}, o)$ d'un cycle A^{n-1} et d'un point o (non situé sur A^{n-1}) est le coefficient $e(A^{n-1}, o - \infty)$ dans l'espace E^n complété par adjonction du point à l'infini. Ce coefficient s'appelle d'ordinaire l'*ordre* du point o par rapport à A^{n-1} ; on a, par définition :

$$e(\dot{C}^n, o) = (C^n, o)$$

et d'autre part, quel que soit le chemin L joignant o à l'infini (par exemple une demi-droite) :

$$e(A^{n-1}, o) = (L, A^{n-1})$$

d'où, comme pour tout coefficient d'enlacement, deux manières de calculer l'ordre.

On a les théorèmes d'invariance habituels. L'ordre ne change pas par déformation continue de A^{n-1} ; il est constant dans chacun des domaines connexes déterminés dans E^n par A^{n-1}. Il ne change pas si on remplace A^{n-1} par un cycle homologue dans $E^n - o$. On a, par exemple, le théorème de Poincaré-Bohl : 22/23

Soient $A = f(Z^{n-1})$, $B = g(Z^{n-1})$ deux cycles continus dans $E^n - o$, images continues d'un même cycle Z^{n-1}, supposons qu'en aucun point de celui-ci, les vecteurs of, og n'aient des directions opposées. *Alors o a même ordre par rapport à A et à B.* Car on peut déformer A dans B : il suffit pour cela de considérer le cycle image de Z^{n-1} par la fonction $(1-\lambda)f + \lambda g$, λ variant de 0 à 1.

Soit maintenant S^{n-1} la sphère de centre o dans E^n, il est évident, si on la considère comme frontière d'une sphère pleine orientée positivement dans E^n, que l'on aura :

$$e(S^{n-1}, o) = +1$$

Soit maintenant φ la fonction, définie dans $E^n - o$, qui à tout point fait correspondre sa projection centrale sur S^{n-1}. A^{n-1} et $\varphi(A^{n-1})$ seront homotopes, et a fortiori homologues dans $E^n - o$ (par le même raisonnement qui conduit au théorème de Poincaré-Bohl) ; d'autre part, on aura, sur S^{n-1} : $\varphi(A^{n-1}) \sim dS^{n-1}$, et d sera le degré topologique du cycle $\varphi(A^{n-1})$ sur S^{n-1}. On aura donc aussi $A^{n-1} \sim dS^{n-1}$ dans $E^n - o$; *d peut être considéré comme défini par l'une de ces deux homologies*, et *d sera en même temps l'ordre de o par rapport à A^{n-1}*. On peut donc, au moyen de ce résultat, calculer un ordre (c'est-à-dire, en définitive un nombre d'intersection) *dans* 23/34
E^n, au moyen d'un degré topologique, c'est-à-dire aussi d'un nombre d'intersection, *dans* S^{n-1}.

7.–. De ce qui précède résulte, entre autres applications le « théorème d'existence de Kronecker » :

Si une fonction f, prenant ses valeurs dans l'espace E^n est définie sur un complexe $\overline{C}^n$, et si l'ordre de o par rapport à $f(\dot{C}^n)$ n'est pas nul, on est certain qu'il y a au moins un point de $\overline{C}^n$ où $f = 0$.

On se reportera au sujet de ce théorème et de ses extensions dans les espaces fonctionnels, à l'exposé de Leray. Le théorème de Kronecker peut d'ailleurs être précisé comme suit : Supposons que les points z_i de $\overline{C}^n$ tels que $f(z_i) = 0$ soient en nombre fini, c'est-à-dire que l'équation $f = 0$ n'ait, sur $\overline{C}^n$, que des solutions isolées ; soit d_1 le degré topologique avec lequel la partie du complexe algébrique C^n qui, (au besoin après subdivision) correspond à un voisinage suffisamment petit de z_i se trouve représentée sur un voisinage de o : alors on aura :

$$e(f(\dot{C}^n), o) = \sum d_i$$

les d_i doivent être considérés comme les multiplicités avec lesquelles doivent être prises les racines z_i de l'équation $f(z) = 0$; on les appelle le plus souvent les *indices*
24/25 de ces racines. Quand C^n est une somme de simplexes pris avec le signe $+1$, sur une variété orientable K^n, et par exemple un domaine fermé triangulable de l'espace E^n, l'indice ne dépend que de la fonction f et de l'orientation de K^n il peut se calculer, par exemple, comme *ordre* (coefficient d'enlacement dans E^n, ou degré brouwérien sur S^{n-1}).

Un autre terme est parfois en usage : Z^{n-1} étant une variété orientable à $n-1$ dimensions, f est une fonction continue, à valeurs dans E^n, définie sur $\overline{Z}^{n-1}$, ou ce qui revient au même, un champ de vecteurs à n composantes (ou encore un système de n fonctions numériques) défini sur $\overline{Z}^{n-1}$: elle est bien déterminée quand la variété a été orientée. Alors l'ordre de o par rapport au cycle $f(Z^{n-1})$ s'appelle la *caractéristique* du champ de vecteurs (ou du système de n fonctions) f sur la variété. Si les vecteurs de deux champs n'ont en aucun point des directions opposées, ils ont même caractéristique, en vertu du théorème de Poincaré-Bohl.

8.–. Nous nous contenterons de donner, de ces principes généraux, les deux applications suivantes.

D'abord le *célèbre théorème du point fixe* de Brouwer (étendu depuis lors à des espaces fonctionnels très généraux par Birkhoff, Schauder, et en dernier lieu Tychonoff, Math.Ann., t.111, p.767) :

25/26 *Soit* Σ^n *un simplexe ; f une transformation de ce [simplexe] dans lui-même,* $f(\Sigma^n) \subset \Sigma^n$. *Alors f possède au moins un point fixe z dans* Σ^n, $f(z) = z$.

Considérons, en effet, sur Σ^n, le champ de vecteurs $f(z) - z$ qui donne le déplacement de z ; supposons qu'il ne s'annule pas sur la frontière $\dot{\Sigma}^n$ (sinon le théorème serait démontré). Et, o étant un point intérieur à Σ^n, considérons le champ de vecteurs $\overrightarrow{zo}$. Les deux champs ont même caractéristique sur $\dot{\Sigma}^n$, par Poincaré-Bohl ; or le second fait correspondre à Σ^n le simplexe symétrique par rapport à o, il a donc une caractéristique ± 1 sur $\dot{\Sigma}^n$, donc le premier aussi, d'où le résultat par application du théorème d'existence de Kronecker. Naturellement, cette démonstration vaut pour tout volume convexe ; le théorème, pour toute figure homéomorphe à un simplexe.

Démontrons encore le théorème de Poincaré-Brouwer :

Sur S^{2n} (sphère à un nombre pair de dimensions) *il n'existe pas de champ de vecteurs tangents sans singularité.*

Représentons S^{2n} comme sphère dans E^{2n+1} ; en vertu du théorème de Poincaré-Bohl, un champ de vecteurs tangents sans singularités (donc partout non nul) aurait même caractéristique que le champ défini par les normales intérieures, et aussi que le

champ défini par les normales extérieures. Un calcul simple montre que ces champs ont des caractéristiques *opposées*, d'ailleurs évidemment égales à ± 1, d'où contradiction. Le théorème vaut pour la sphère ordinaire ($n = 1$). On le retrouvera plus tard comme 26/27
conséquence de la théorie générale des points fixes.[12]

Bibliographie.

LEFSCHETZ, Topology (avec bibliographie détaillée des travaux anciens, en particulier ceux de Brouwer)

ALEXANDROFF-HOPF, Topologie – I.

G.de RHAM, Thèse (Paris 1931) = J. de Liouville (IX) t.10 p.115-200 ; on consultera aussi une note du même auteur Comment.Math.Helv. t.4, p.151, où se trouve exposé le moyen d'étendre la définition des nombres d'intersection aux variétés non orientables, d'où résulte – entre autres – pour ces variétés un théorème de dualité correspondant à celui de Poincaré.

Cf. aussi l'exposé (futur) sur la théorie des intersections et des formes différentielles.[13]

Notes

1. Les références données dans la bibliographie à la fin de l'exposé sont le livre de Lefschetz [Lef30] (qui contient une bibliographie très complète, jusqu'en 1930) et celui d'Alexandroff et Hopf [AH35], dont André Weil avait attendu la sortie avec impatience. Rappelons que ce dernier est dédié à Brouwer. La thèse de Georges de Rham, publiée comme [dR31] et son article [dR32] sont aussi cités. Pour le théorème du point fixe, il est fait référence à l'article récent de Tychonoff [Tyc35].
2. Complexe courbe est la traduction de *Krummer Komplex* d'Alexandroff-Hopf [AH35]. Voir à l'inverse les simplexes rectilignes (exposé 3-B) ou droits (exposé 3-H).
3. Il faut bien sûr lire « Alexandroff ».
4. Il y a déjà des nombres d'intersection dans l'*Analysis situs* de Poincaré [Poi53, p. 220].
5. Le terme n'a pas duré. On dit aujourd'hui « sphère d'homologie » (et même *homology sphere*).
6. L'utilisation d'espaces « pointés », c'est-à-dire dans lesquels on a choisi un point (pour définir le groupe fondamental, par exemple) imposera l'adjectif « épointé » pour les espaces auxquels on a retiré un point.
7. Voici l'essai de définition axiomatique du nombre d'intersection que mentionnait Weil dans la citation reproduite dans l'introduction à cette année du séminaire.
8. Encore ici 0 désigne l'ensemble vide. Si André Weil va inventer la notation $\varnothing$ [Wei91], ce n'est pas encore fait.
9. Le « vgothique », $\mathfrak{v}$, de [AH35] est pour *Verschlingungszahl*, le *Lc* de [Lef30] est pour *looping coefficient* (*linking number* est encore à venir). C'est un bon endroit pour signaler que le livre d'Alexandroff et Hopf est illustré de nombreuses figures, dont nous reproduisons ici quelques exemples.
10. Le degré de la composition de deux applications a été étudié dans l'exposé 3-B.
11. L'adjectif « topologique » appliqué à une transformation dit ici que celle-ci est un homéomorphisme.

Die Zahl $|\mathfrak{v}(z_1^r, z_2^s)| = |\mathfrak{v}(z_2^s, z_1^r)|$ ist *die „gegenseitige Verschlingungszahl" von z_1^r und z_2^s*. Wenn sie $\neq 0$ ist, so heißen z_1^r und z_2^s *„miteinander verschlungen"*.

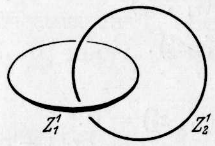

Abb. 29.

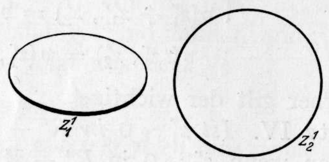

Abb. 30.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Verschlingungs-„Zahlen" immer Elemente des zugrunde gelegten Koeffizientenringes $\mathfrak{J}$ sind.

Beispiele entnimmt man erstens den Abbn. 28a und 28b, indem man $z_1^1 = \dot{x}^2$, $z_2^1 = \dot{y}^2$ setzt; die Verschlingungszahlen sind 0 bzw. 1. Ferner den Abbn. 29, 30, 31, 32 (in ihnen hat man unter z_1^1, z_2^1 hinreichend feine und geeignet orientierte Sehnenpolygone der gezeichneten krummen Linien zu verstehen); die Verschlingungszahlen (in bezug auf $\mathfrak{G}$)

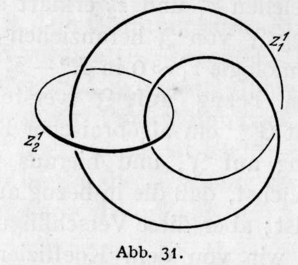

Abb. 31.

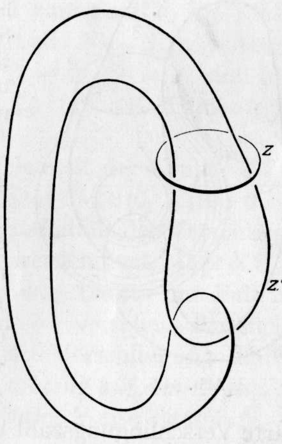

Abb. 32.

12. Le théorème du point fixe de Lefschetz fait l'objet de l'exposé 3-H de de Possel.
13. Ce futur sera l'année suivante, l'exposé 4-A donné par André Weil le 16 novembre 1936.

Références

[AH35] P. Alexandroff & H. Hopf – *Topologie*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 45, Springer-Verlag, Berlin, 1935.

[dR31] G. de Rham – « Sur l'analysis situs des variétés à n dimensions », *J. Math. Pures Appl. (9)* **10** (1931), p. 115–200.

[dR32] ———, « Sur la théorie des intersections et les intégrales multiples », *Comment. Math. Helv.* **4** (1932), p. 151–157.

[Lef30] S. Lefschetz – *Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 12, American Mathematical Society, New York, 1930.

[Poi53] H. Poincaré – *Œuvres, Volume VI*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[Tyc35] A. Tychonoff – « Ein Fixpunktsatz », *Math. Ann.* **111** (1935), p. 767–776.

[Wei91] A. Weil – *Souvenirs d'apprentissage*, Vita Mathematica, vol. 6, Birkhäuser, Basel, 1991.