

LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin


3. Année 1935-1936 *Topologie*

Claude Chevalley

Les théories de dualité I

Séminaire de mathématiques (1935-1936), Exposé 3-D, 8 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1935-1936__3__D_0.pdf>

 Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

LES THÉORIES DE DUALITÉ I

par Claude Chevalley

A. — Dualité entre groupes abéliens. Soit \mathfrak{A} un groupe abélien^[1]. On appelle en général caractère de \mathfrak{A} une fonction $\chi(\alpha)$, définie sur \mathfrak{A} , dont la valeur est un nombre complexe de module 1, et qui satisfait à l'égalité

$$\chi(\alpha\alpha'^{-1}) = \chi(\alpha)\chi^{-1}(\alpha')$$

où α, α' sont des éléments quelconques de \mathfrak{A} . Comme nous aurons exclusivement affaire à des groupes additifs, il nous sera commode de remplacer ces caractères multiplicatifs par des caractères additifs. Les valeurs de ces caractères seront des nombres réels pris (mod.1), c'est à dire des éléments du groupe quotient du groupe additif des nombres réels par le groupe additif des entiers. Nous appellerons donc dans ce qui suit caractère du groupe \mathfrak{A} une fonction $\chi(\alpha)$ définie sur \mathfrak{A} , dont la valeur est un nombre réel (mod.1) et qui satisfait à l'égalité

$$\chi(\alpha - \alpha') = \chi(\alpha) - \chi(\alpha')$$

Si χ, χ' , sont des caractères, il en est de même de $\chi \pm \chi'$. Il en résulte tout de suite que les caractères de \mathfrak{A} forment un groupe abélien additif. Soit \mathfrak{B} ce groupe. Nous introduirons une topologie dans \mathfrak{B} de la manière suivante : on prend un nombre fini d'éléments $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ de \mathfrak{A} et on leur fait correspondre des voisinages V_1, V_2, \dots, V_n dans le groupe des nombres réels (mod.1); on définit ensuite un voisinage dans \mathfrak{B} comme étant l'ensemble des χ tels que l'on ait

$$\chi(\alpha_i) \in V_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

La topologie définie dans \mathfrak{B} par cette famille de voisinages est bicomacte.

Chaque élément α de \mathfrak{A} définit un caractère $\psi_\alpha(\chi)$ du groupe \mathfrak{B} par la formule

$$\psi_\alpha(\chi) = \chi(\alpha)$$

et de plus, la fonction $\psi_\alpha(\chi)$ est continue sur \mathfrak{B} . On démontre que : *Le groupe isomorphe à \mathfrak{A} constitué par les caractères $\psi_\alpha(\chi)$ est identique au groupe de tous les caractères continus de \mathfrak{B} .* Inversement, si \mathfrak{B} est un groupe abélien bicomact, et si

\mathfrak{A} est le groupe des caractères continus de \mathfrak{B} , \mathfrak{B} est le groupe de tous les caractères continus de \mathfrak{A} .

Désignant par α un élément de \mathfrak{A} , par β un élément de \mathfrak{B} , chacun des éléments α , β , est un caractère de celui des groupes \mathfrak{A} , \mathfrak{B} autre que celui dans lequel il est pris et on a $\beta(\alpha) = \alpha(\beta)$.^[2] Nous désignerons ce nombre par $\varphi(\alpha, \beta)$. Ce nombre jouit des propriétés suivantes :

- 2/3 I.– $\varphi(\alpha - \alpha', \beta) = \varphi(\alpha, \beta) - \varphi(\alpha', \beta)$; $\varphi(\alpha, \beta - \beta') = \varphi(\alpha, \beta) - \varphi(\alpha, \beta')$.
 II.– Si, α étant fixe, on a $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ quel que soit β , on a $\alpha = 0$; si, β étant fixe, on a $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ quel que soit α , on a $\beta = 0$.
 III.– Pour chaque α , $\varphi(\alpha, \beta)$ est une fonction continue sur le groupe \mathfrak{B} .

Définition. \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , étant des groupes abéliens additifs, dont le premier est discret et le second bicompat, s'il existe une fonction $\varphi(\alpha, \beta)$ dont la valeur est un nombre réel (mod.1), définie pour $\alpha \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \mathfrak{B}$ et satisfaisant aux conditions I, II, III, on dit que la fonction définit entre ces deux groupes une relation de dualité.

S'il en est ainsi, on montre que tout caractère de \mathfrak{A} se met sous la forme $\varphi(\alpha, \beta)$ pour un β convenable, et que tout caractère continu de \mathfrak{B} se met sous la forme $\varphi(\alpha, \beta)$, pour un α convenable.

On démontre de plus, dans ce cas, les faits suivants :

- 3/4 Si \mathfrak{A}_1 est un sous-groupe de \mathfrak{A} , le groupe des β tels que $\varphi(\mathfrak{A}_1, \beta) = 0$ (c'est à dire tels que $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ pour $\alpha \in \mathfrak{A}_1$) est un sous-groupe fermé \mathfrak{B}_1 de \mathfrak{B} , et \mathfrak{A}_1 est identique au groupe de tous les α tels que $\varphi(\alpha, \mathfrak{B}_1) = 0$. Tout sous groupe fermé de \mathfrak{B} se trouve être de cette manière le correspondant d'un sous-groupe de \mathfrak{A} . Si $\bar{\alpha}$ est une classe de \mathfrak{A} (mod. \mathfrak{A}_1) et si $\beta \in \mathfrak{B}_1$, la fonction $\bar{\varphi}(\bar{\alpha}, \beta) = \varphi(\alpha, \beta)$ pour $\alpha \in \bar{\alpha}$, définit une relation de dualité entre $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}_1$ et \mathfrak{B}_1 . De même, \mathfrak{A}_1 et $\mathfrak{B}/\mathfrak{B}_1$ sont en dualité.

Si \mathfrak{A} est le groupe des entiers, son groupe des caractères est le groupe \mathfrak{R} des nombres réels mod.1). Si \mathfrak{A} est fini, il en est de même de \mathfrak{B} , et \mathfrak{B} est le produit direct des groupes $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ des caractères de $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$.

Il en résulte que si \mathfrak{A} est produit direct de p groupes cycliques infinis et d'un groupe fini d'ordre t , \mathfrak{B} est produit direct de p groupes isomorphes à \mathfrak{R} et d'un groupe fini d'ordre t .

Enfin, si \mathfrak{A} est dénombrable, \mathfrak{B} est séparable (donc compact).

- B.– Complexes abstraits.** Dans l'étude topologique des figures polyédrales, il est souvent commode de les décomposer en éléments qui ne soient pas des simplexes, mais en des figures un peu plus compliquées, qu'on obtient généralement en groupant des simplexes entre eux. D'autre part, les moyens que fournit la théorie de l'homologie peuvent être appliqués dans des cas où la géométrie ne fournit pas directement les simplex^[3] dont on a besoin. C'est pourquoi il est avantageux d'introduire la notion de complexe abstrait.
- 4/5

On appelle complexe abstrait un ensemble fini K d'éléments E, E', \dots appelés cellules, muni d'une relation d'incidence, c'est à dire d'une relation $\mathcal{J}(E, E')$ entre deux cellules, qui se lit : « E est incidente à E' », et qui jouit des propriétés suivantes :

- a) Si E est incidente à E' , et E' à E'' , E est incidente à E''
- b) E n'est pas incidente à E .

Un type important de complexes abstraits est donné par les complexes simpliciaux. On obtient un complexe simplicial de la manière suivante : on se donne un ensemble fini \mathfrak{S} d'éléments, qui seront appelés les sommets du complexe ; les cellules du complexe sont les éléments d'une famille de parties non vides de \mathfrak{S} , qui jouit de la propriété suivante : toute partie de \mathfrak{S} non vide et contenue dans une partie de la famille appartient à la famille ; - tout sommet appartient à au moins une partie de la famille ; la relation d'incidence est la suivante : la cellule (ou simplex abstrait) S est incidente à S' si tous les sommets de S appartiennent aussi à S' .

On appelle dimension d'un simplex le nombre de ses sommets diminué de 1. On appelle dimension d'un complexe simplicial la dimension maxima des simplex de ce complexe.

On démontre qu'un complexe simplicial de dimension n peut toujours être réalisé géométriquement dans l'espace euclidien à $2n + 1$ dimensions, c'est à dire qu'on peut fabriquer dans cet espace une figure polyédrale dont les simplex aient exactement les mêmes relations d'incidence que le complexe donné. 5/6

Rangeons dans un certain ordre les sommets d'un complexe simplicial, et supposons que les sommets de chaque simplex seront toujours rangés dans cet ordre. On peut alors définir une *fonction frontière* dans le complexe simplicial par la formule classique : la frontière du simplex $\{A_0, A_1, \dots, A_n\}$ sera la chaîne

$$\{A_1, A_2, \dots, A_r\} - \{A_0, A_2, \dots, A_r\} + \dots + (-1)^r \{A_0, A_1, \dots, A_{r-1}\}$$

Si nous nous donnons un groupe abélien additif, nous pourrons construire, avec notre fonction frontière et le groupe, les groupes d'homologie du complexe simplicial. Ces groupes sont indépendants de l'ordre adopté au début pour les sommets.

Soit maintenant K un complexe abstrait quelconque. Il est possible d'associer à K un complexe simplicial K' de la manière suivante : les sommets de K' seront en correspondance bi-univoque avec les cellules de K ; on rangera ces sommets dans un ordre tel que si les sommets A, A' correspondent aux cellules E, E' de K , et si E est incidente à E' , A soit avant A' : un ensemble $\{A_0, A_1, \dots, A_r\}$ de sommets constituera un simplex de K' si, et seulement si, les sommets étant rangés dans l'ordre indiqué, les cellules E_0, E_1, \dots, E_r de K qui leur correspondent, sont telles que E_{i-1} soit incidente à E_i ($i = 1, 2, \dots, r$). Le complexe simplicial ainsi obtenu est appelé la *subdivision régulière de E* . Si le dernier sommet d'un simplex S de K' correspond à la cellule E de K , on dira que S est sur E . La dimension maxima des simplex de K' qui sont sur une E donnée sera appelée la dimension de K . On notera en général une cellule de 6/7

dimension r par le symbole E^r , affecté au besoin d'indices. La dimension de K sera la dimension maxima des cellules de K . Ce sera aussi celle de K' .

On appellera groupes d'homologie de K (construits avec un groupe abélien additif \mathfrak{A}) les groupes d'homologie de K' construits avec ce groupe.

Si L est un sous-complexe de K , il est clair que les cellules de K' qui sont sur des cellules de L forment un complexe L' qui n'est autre que la subdivision régulière de L .

Définition. Le complexe K sera dit normal si les caractères d'homologie du complexe frontière d'une E^r de K (c'est à dire du complexe formé par les cellules de K incidentes à E^r) sont les mêmes que ceux d'une sphère de dimension $r - 1$ (la sphère de dimension 0 se composant de deux points).

7/8 L'intérêt de la notion de complexe normal provient des faits suivants :

Dans un complexe normal, on peut associer au couple formé par une E_j^{r-1} et une E_i^r un coefficient d'incidence η_{ij}^r qui est un nombre entier satisfaisant aux conditions suivantes :

- a) Si E_j^{r-1} n'est pas incidente à E_i^r , on a $\eta_{ij}^r = 0$
- b) On a $\sum_j \eta_{ij}^r \eta_{jk}^{r-1} = 0$, ce qui signifie que si on définit une fonction frontière \mathcal{F} par les formules

$$\mathcal{F}(E_i^r) = \sum \eta_{ij}^r E_j^{r-1} \quad \mathcal{F}(E_i^0) = 0$$

on a $\mathcal{F}(\mathcal{F}) = 0$

- c) Si au moyen de la fonction frontière précédente et d'un groupe abélien additif \mathfrak{A} , on définit à la manière habituelle les cycles et l'homologie, les groupes d'homologie que l'on trouvera sont ceux de K (c'est à dire ceux de K').

C. — Théorèmes de Stokes dans un complexe. Soit K un complexe normal. Prenons un groupe abélien discret \mathfrak{A} , et appelons différentielle d'ordre r dans K , une fonction $f(r)$, qui, à chaque E^r de K associe un élément $f(E^r)$ de \mathfrak{A} . Il est clair que les différentielles d'ordre r forment un groupe additif \mathcal{G}^r . Soit maintenant \mathfrak{B} le groupe des caractères de \mathfrak{A} . Formons le groupes additif \mathcal{C}^r des chaînes de K de dimension r construites avec \mathfrak{B} . Si k_r est le nombre des cellules de dimension r de K , \mathcal{C}^r est le produit direct de k_r groupes isomorphes à \mathfrak{B} : on peut donc le considérer comme un groupe topologique bicomact.

8/9 Soit $\varphi(\alpha, \beta)$ la fonction qui définit la dualité entre \mathfrak{A} et \mathfrak{B} ; f_r étant un élément de \mathcal{C}^r , $C_r = \sum \beta_i E_i^r$, appelons intégrale de f_r sur C_r , et désignons par $\Phi(f_r, C^r)$ ou par $\int_{C^r} f_r$ le nombre (mod.1) défini par

$$\Phi(f_r, C^r) = \int_{C^r} f_f = \sum_i \varphi(f_r(E_i), \beta_i)$$

Il est clair que la fonction Φ définit une relation de dualité entre \mathcal{G}^r et \mathcal{C}^r .

Appelons maintenant *dérivée* de la différentielle f_r et désignons par δf_r la différentielle d'ordre $r - 1$ définie par la formule

$$\delta f_r(E_k^{r+1}) = \sum_i \eta_{ki}^{r+1} f_r(E_i)$$

où les η_{ij} sont les coefficients d'incidence du complexe K . Il résulte tout de suite de cette formule que l'on a

$$(1) \quad \int_{\mathcal{G}(C^{r+1})} f_r = \int_{C^{r+1}} \delta f_r$$

égalité qui a la forme d'un théorème de Stokes.

9/10

Nous dirons que f_r est une différentielle exacte si $\delta f_r = 0$; les différentielles exactes forment un sous-groupe \mathcal{E}^r de \mathcal{G}^r ; les différentielles d'ordre r qui sont des dérivées de différentielles d'ordre $r - 1$ forment un sous-groupe \mathcal{V}^r de \mathcal{E}^r . La formule (1) montre tout de suite que, dans la dualité entre \mathcal{G}^r et \mathcal{C}^r , le groupe \mathcal{E}^r correspond au groupe \mathcal{B}^r des cycles ~ 0 , et que \mathcal{V}^r correspond au groupe \mathcal{Z}^r de tous les cycles. Par suite :

Le groupe $\mathcal{E}^r/\mathcal{V}^r$ est en dualité avec le groupe d'homologie pour la dimension r , construit avec \mathcal{B} .

D. — Variétés. K étant un complexe, nous allons d'abord lui associer un nouveau complexe $\overset{*}{K}$, son dual. Pour cela, nous ferons correspondre biunivoquement à chaque cellule E de K un nouvel objet $\overset{*}{E}$, qui sera appelé la cellule duale de E . Les $\overset{*}{E}$ seront les cellules de $\overset{*}{K}$; la relation d'incidence dans $\overset{*}{K}$ sera la suivante : la cellule $\overset{*}{E}$ sera incidente à $\overset{*}{E}'$ si, et seulement si, E' est incidente à E . Il est clair que K a la même subdivision régulière que $\overset{*}{K}$.

Le complexe K étant supposé normal, nous dirons qu'il définit une *variété combinatoire* si le complexe dual de la subdivision régulière de K est un complexe normal, et si K est connexe (le nombre de Betti pour la dimension 0 est 1). Dans ce cas, on

10/11

- a) chaque cellule de K est incidente à une cellule de dimension maxima n ; une cellule de dimension $n - 1$ de K est incidente à deux cellules de dimension n .
- b) Le complexe frontière e chaque cellule de K est une variété combinatoire.
- c) Le dual $\overset{*}{K}$ de K est aussi normal. La duale d'une E^r de K est une E^{n-r} .
- d) La notion de variété combinatoire est invariante, c'est à dire que si deux complexes réalisés géométriquement sont homéomorphes, et si l'un définit une variété combinatoire, il en est de même de l'autre. Si, dans un complexe simplicial géométrique, chaque point possède un voisinage homéomorphe à l'intérieur d'une sphère à n dimensions, ce complexe définit une variété. Mais on ne sait pas si la réciproque est vraie.

Une variété de dimension n est dite *orientable* si son nombre de Betti pour la dimension n est 1.

On montre que si un complexe normal K dans lequel la fonction frontière est donnée par les formules

$$\mathcal{F}(E_i^{n-r}) = \sum_k \eta_{ki}^{r+1} E_k^{r-1}$$

11/12

Nous supposons désormais que K est une variété orientable.

Prenons un groupe abélien additif \mathfrak{A} et formons le groupe \mathfrak{C}^{n-r} des chaînes de dimension $n-r$ de K construites avec \mathfrak{A} . À chacune de ces chaînes $\sum \alpha_i E_i^{n-r}$ faisons correspondre la différentielle f_r d'ordre r de K définie par les formules

$$f_r(E_i^r) = \alpha_i$$

Nous obtenons une isomorphie du groupe \mathfrak{C}^{n-r} avec le groupe \mathfrak{G}^r introduit plus haut. Dans cette isomorphie, on voit tout de suite que le groupe \mathfrak{Z}^{n-r} des cycles correspond à \mathfrak{E}^r et que le groupe \mathfrak{G}^{n-r} des cycles ~ 0 correspond à \mathfrak{D}^r . Donc : *le groupe d'homologie de K pour la dimension $n-r$, construit avec \mathfrak{A} , est isomorphe à $\mathfrak{E}^r/\mathfrak{D}^r$.*

Or, si \mathfrak{B} est le groupe des caractères de \mathfrak{A} , ce dernier groupe est en dualité avec le groupe d'homologie de K , construit avec \mathfrak{B} . En se rappelant que les groupes d'homologie de K et \bar{K} sont les mêmes, puisque ces complexes ont une même subdivision régulière, on obtient le *théorème de dualité de Poincaré-Pontrjagin* :

Le groupe d'homologie pour la dimension $n-r$ d'une variété, construit avec un groupe \mathfrak{A} , est en dualité avec le groupe d'homologie pour la dimension r de cette
12/13 *variété, construit avec le groupe des caractères \mathfrak{A} .*

D'autre part, on constate facilement que le groupe d'homologie pour la dimension r d'un complexe, construit avec le groupe \mathfrak{R} des nombres réels (mod.1) est produit direct de B_r groupes isomorphes à \mathfrak{R} , B_r étant le nombre de Betti pour la dimension r , et du groupe de torsion pour la dimension $r-1$. Donc :

Les nombres de Betti d'une variété de dimension n pour les dimensions r et $n-r$ sont égaux. Les coefficients de torsion pour les dimensions r et $n-r-1$ sont égaux.

Soit maintenant L un sous-complexe de K . Les duales des cellules de L forment un sous-ensemble \bar{L} du dual \bar{K} de K . Les cellules de \bar{K} . Les cellules de \bar{K} qui ne sont pas dans \bar{L} forment un sous-complexe de \bar{K} ; les groupes d'homologie de ce sous-complexe seront appelés groupes d'homologie de $K-L$ (si K est réalisé géométriquement, on montre que toute chaîne singulière sur \bar{K} qui ne rencontre pas \bar{L} peut être déformée, sans jamais rencontrer \bar{L} , en une chaîne de la subdivision régulière de $\bar{K}-\bar{L}$, ce qui justifie cette définition[]).

Ceci posé, en raisonnant exactement comme dans la définition du théorème de Poincaré, on démontre le théorème de Lefschetz :

Le groupe d'homologie de $K - L$ pour la dimension r , construit avec \mathfrak{A} , est en dualité avec le groupe d'homologie pour la dimension $n - r$ de $L \pmod{L}$ construit avec \mathfrak{B} .

13/14

On remarquera que l'isomorphie entre \mathfrak{C}^{n-r} et \mathfrak{G}^r définie plus haut, donne une relation de dualité entre \mathfrak{C}^{n-r} et \mathfrak{G}^r , le groupe des chaînes de dimension r de K construites avec \mathfrak{B} . $C^{n-r} = \sum \alpha_i E_i^{n-r}$ et $C^r = \sum \beta_i E_i^r$ étant des éléments de \mathfrak{C}^{n-r} et de \mathfrak{C}^r , la dualité est donnée par la fonction

$$I(C^{n-r}, C^r) = \sum_i \varphi(\alpha_i, \beta_i)$$

qu'on appelle indice de Kronecker (mod.1) de ces chaînes.

Désignons maintenant par \mathfrak{Z}_L^{r-1} le groupe des cycles de L qui sont ~ 0 dans K , par \mathfrak{G}_L^{r-1} le groupe de ceux qui sont ~ 0 dans L , par $\mathfrak{Z}^r \pmod{L}$ le groupe des cycles (mod. L) de dimension r de K , par $\mathfrak{G}^r \pmod{L}$ le groupe de ceux qui sont homologues (mod. L) à des cycles de K . Chaque élément Z^{r-1} de \mathfrak{Z}^{r-1} est frontière d'un élément Z^r de $\mathfrak{Z}^r \pmod{L}$ qui, quand Z^{r-1} est déterminé à un élément près de \mathfrak{G}_L^{r-1} , est déterminé à un élément près de $\mathfrak{G}^r \pmod{L}$.

Donc : Les groupes $\mathfrak{Z}_L^{r-1}/\mathfrak{G}_L^{r-1}$ et $\mathfrak{Z}^r \pmod{L}/\mathfrak{G}^r \pmod{L}$, construits avec le groupe des coefficients \mathfrak{B} sont isomorphes.

D'autre part, dans la dualité entre \mathfrak{C}^r et \mathfrak{C}^{n-r} , au groupe $\mathfrak{Z}^r \pmod{L}$ correspond le groupe des cycles de $K - L$, construits avec le groupe \mathfrak{A} et ~ 0 dans $K - L$; soit \mathfrak{G}_{K-L}^{n-r} ce groupe; au groupe $\mathfrak{G}^r \pmod{L}$ correspond le groupe des cycles de dimension $n - r$ de $K - L$ qui sont ~ 0 dans K ; \mathfrak{Z}_{K-L}^{n-r} ce groupe. Il résulte de ce que nous venons de dire le *théorème d'Alexander-Pontrjagin* :

14/15

Les groupes $\mathfrak{Z}_L^{r-1}/\mathfrak{G}_L^{r-1}$ et $\mathfrak{Z}_{K-L}^{n-r}/\mathfrak{G}_{K-L}^{n-r}$ sont en dualité l'un avec l'autre.

En supposant que K soit l'espace à n dimensions, complété par un point à l'infini, ou encore une sphère à n dimensions, on déduit de là, en particulier, les propositions suivantes :

Le nombre de Betti pour la dimension $r - 1$ de L est égal au nombre de Betti pour la dimension $r - 1$ de $K - L$, augmenté de 1 si $r = 1$, diminué de 1 si $r = n$.

Il en résulte en particulier que si un sous-complexe de K est homéomorphe à une sphère de dimension $n - 1$, il partage K en deux domaines : c'est le théorème de Jordan, pour les sous-complexes.

15/16

Bibliographie

Pour la théorie de la dualité entre groupes abéliens cf. :

PONTRJAGIN. Theory of topological commutative groups, Ann.of Math. 1934, et divers articles de généralisation parus dans les Annals of Math. et Amer.Journ.of Math. en 1934/35 (van Kampen, Alexander)

- A. WEIL, Méthodes intégrales en théorie des groupes, à paraître prochainement.
 Pour la théorie des variétés :
 LEFSCHTZ, Topology (Cambr.Coll.)
 TUCKER, An abstract approach to manifolds, Ann.of Math.34
 PONTRJAGIN, Die Algebraische Struktur der Topol.Dualitätssätze, Math.Ann.105,
 1931^[4]
 ALEXANDER, On the chains of a complex and their duals, Proc.of the
 Nat.Acad.of Sciences, 1935, p.509.

Notes

1. La bibliographie de cet exposé fait référence à deux articles de Pontrjagin [Pon31] et [Pon34], à l'hypothétique livre d'André Weil, c'est-à-dire, finalement [Wei40], au livre [Lef30] de Lefschetz, aux articles de Tucker [Tuc33] et d'Alexander [Ale35]. Parmi les articles sur les groupes évoqués dans la bibliographie, il faut signaler ceux [vK35] de van Kampen et [Ale34] d'Alexander.
2. Une élégante formulation de la bidualité.
3. À partir d'ici et dans toute la suite de l'exposé, simplexe est écrit « simplex » (comme en allemand ?), même au pluriel.
4. Il y a une erreur dans le numéro de page, et aussi une erreur dans le titre, il n'y est pas question de structure mais de contenu (*Inhalt*)...

Références

- [Ale34] J. ALEXANDER – « On the characters of discrete abelian groups », *Ann. of Math. (2)* **35** (1934), p. 389–395.
 [Ale35] ———, « On the chains of a complex and their duals. », *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **21** (1935), p. 509–511.
 [Lef30] S. LEFSCHETZ – *Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 12, American Mathematical Society, New York, 1930.
 [Pon31] L. PONTRJAGIN – « Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze. », *Math. Ann.* **105** (1931), p. 165–205.
 [Pon34] ———, « The theory of topological commutative groups. », *Annals of Math.* **35** (1934), p. 361–388.
 [Tuc33] A. W. TUCKER – « An abstract approach to manifolds », *Ann. of Math. (2)* **34** (1933), no. 2, p. 191–243.
 [vK35] E. R. VAN KAMPEN – « Locally bicomact abelian groups and their character groups », *Ann. of Math. (2)* **36** (1935), no. 2, p. 448–463.
 [Wei40] A. WEIL – *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Publications de l'Institut mathématique de Clermont-Ferrand, Hermann, Paris, 1940.