

LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

3. Année 1935-1936 *Topologie*

Charles Ehresmann

Topologie combinatoire, groupes d'homologie

Séminaire de mathématiques (1935-1936), Exposé 3-B, 14 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1935-1936__3__B_0.pdf>



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

cedram

Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

TOPOLOGIE COMBINATOIRE, GROUPES D'HOMOLOGIE

par Charles Ehresmann

Le but^{[1][2]} de cette conférence est d'exposer, d'une façon nécessairement sommaire, les notions essentielles ainsi que les premiers résultats fondamentaux de la *topologie combinatoire*. Je ne cherche pas à donner une définition précise du terme « topologie combinatoire ». Il ne désigne pas une branche spéciale mais simplement une méthode spéciale de la topologie, méthode qui convient à la résolution de certains problèmes et qui permet de déterminer un certain nombre d'invariants topologiques d'un espace topologique. Cette méthode combinatoire repose surtout sur les notions de *simplexe* et de *complexe*. Elle s'applique directement à tout espace qui peut être considéré comme un agrégat de simplexes, c'est-à-dire comme un complexe. Par exemple, toute variété algébrique peut être considérée comme un complexe. Plus généralement, d'après un résultat publié tout récemment par M. Nöbeling, toute variété topologique admet une subdivision formant un complexe; on désigne par variété topologique, un espace topologique normal satisfaisant au deuxième axiome de dénombrabilité et tel que tout point admet un voisinage homéomorphe à l'intérieur d'une sphère^[3] à n dimensions. La méthode combinatoire s'applique même à des espaces qui ne sont pas des complexes mais qui peuvent être approximés par des complexes ou définis par des suites de complexes. Le champ d'application de la topologie combinatoire comprend ainsi tous les ensembles fermés de l'espace ordinaire à n dimensions ainsi que tous les espaces métriques compacts. 1/2

Je commencerai par définir les notions de simplexe et de complexe. Je définirai ensuite les groupes d'homologie et les invariants numériques qui s'en déduisent. Je démontrerai enfin l'invariance topologique des groupes d'homologie.

I.— Définitions.

Simplexes à r dimensions. Soit R^n l'espace cartésien à n dimensions; chaque point de R^n est défini par l'ensemble de n nombres réels. Soient $P_0, P_1, P_2, \dots, P_r$ $r + 1$ points de l'espace R^n et supposons que ces points n'appartiennent pas à un même espace linéaire à moins de r dimensions.

Attachons à chacun de ces points P_i une masse μ_i telle que :

$$(1) \quad \sum_i \mu_i = 1 \quad \mu_i \geq 0$$

Le centre de gravité de ces masses est le point

$$P = \sum_i \mu_i P_i$$

Les quantités μ_i sont appelées les coordonnées barycentriques de P . L'ensemble des points P dont les coordonnées barycentriques satisfont aux conditions (1) forme un espace topologique e^r qu'on appelle simplexe à r dimensions. Le simplexe est complètement défini par ses $r + 1$ sommets. En annulant $r - k$ des coordonnées barycentriques μ_i , le point P engendre un simplexe qu'on appelle face à k dimensions de e^r .

Représentation barycentrique. Soient deux simplexes e^r et e_1^s tels que $r \geq s$. Faisons correspondre à chaque sommet P_i de e^r un sommet $Q_{t(i)}$ de e_1^s de façon que tout sommet de e_1^s corresponde au moins à un sommet de e^r . Faisons correspondre au point $P = \sum_i \mu_i P_i$ le point $Q = \sum_i \mu_i Q_{t(i)}$. La correspondance entre P et Q définit une représentation barycentrique^[4] du simplexe e^r sur le simplexe e_1^s .

Simplexe orienté. On définit une orientation d'un simplexe en choisissant une certaine permutation de ses sommets. Deux permutations définissent la même orientation ou deux orientations opposées suivant qu'elles diffèrent par une permutation paire ou impaire. Tout simplexe non orienté correspond ainsi à deux simplexes orientés qu'on peut désigner par e^r et $-e^r$. Si e^r est défini par (P_0, P_1, \dots, P_r) , le simplexe orienté $-e^r$ est défini par (P_1, P_0, \dots, P_r) .

Simplexe topologique. Soit A un espace topologique homéomorphe à un simplexe rectiligne e^r .^[5] L'espace A associé à une représentation topologique de e^r sur A définit un simplexe topologique E^r . Si A est considéré comme l'image topologique d'un autre simplexe rectiligne e_1^r , il définit un simplexe topologique E_1^r . Les deux simplexes E^r et E_1^r sont considérés comme identiques lorsque les points de e^r et e_1^r qui sont représentés par le même point de A se correspondent par une transformation barycentrique.^[6] Les notions de sommet, face, orientation, correspondance et coordonnées barycentriques sont alors applicables à un simplexe topologique. D'une façon générale, nous considérons par la suite des simplexes topologiques.

Complexe simplicial. Un complexe simplicial est un espace topologique K défini par l'ensemble d'un nombre fini ou dénombrable de simplexes, satisfaisant aux conditions suivantes :

- (1) Tout point de K appartient à un nombre fini de simplexes donnés et à un simplexe au moins.

- (2) Les faces d'un simplexe de l'ensemble des simplexes appartiennent aussi à cet ensemble.
- (3) Étant donné deux simplexes de l'ensemble considéré, ou bien ils n'ont pas de points communs, ou bien ils ont une face commune, ou bien l'un est une face de l'autre.
- (4) Si l'on considère un voisinage d'un point P dans chacun des simplexes auxquels ce point appartient, la réunion de ces voisinages définit un voisinage de P dans le complexe K .

Exemples. La sphère ou un polyèdre admettent des décompositions en simplexes définissant des complexes finis. 4/5

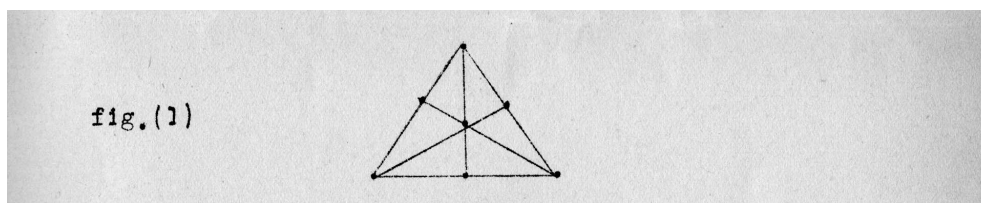
L'espace R^n ou un domaine quelconque des R^n admettent des décompositions en simplexes définissant des complexes infinis.^[7]

Si on peut établir une correspondance biunivoque entre les sommets d'un complexe K et ceux d'un complexe K_1 de façon que les sommets d'un simplexe de l'un des complexes correspondent aux sommets d'un simplexe de l'autre, cette correspondance définit une transformation topologique par laquelle tout simplexe de K subit une transformation barycentrique. En désignant par K^n un complexe composé de simplexes à n dimensions au plus, et en admettant au moins un simplexe à n dimensions, on démontre facilement le théorème suivant :

Théorème. *Tout complexe K^n est simplicialement homéomorphe à un complexe rectiligne de l'espace R^{2n+1} .*

Sous-complexe. Un sous-complexe d'un complexe K est un complexe composé de simplexes de K .

Subdivision. Une subdivision d'un complexe K est un complexe K' tel que tout simplexe de K coïncide avec un sous-complexe de K' . En particulier, la subdivision *normale* d'un complexe K est définie de la façon suivante : sur chaque simplexe E^r de K nous considérons le centre de gravité, c'est-à-dire le point dont les r coordonnées barycentriques sont égales. Considérons une suite de simplexes $E^{r_1}, E^{r_2}, \dots, E^{r_k}$ tels 5/6



que

$$E^{r_1} \subset E^{r_2} \subset \dots \subset E^{r_k}; \quad r_1 < r_2 < \dots < r_k$$

Les centres de gravité de ces simplexes définissent dans E^{rk} un simplexe \overline{E}^k qui sera le simplexe général de la subdivision normale de K . La subdivision normale de K s'appelle aussi *complexe dérivé* de K . La figure (1) représente la subdivision normale d'un triangle.

Une question fondamentale de la topologie combinatoire est la suivante : *Si deux complexes K et K_1 sont homéomorphes, existe-t-il une subdivision K' de K et une subdivision K'_1 de K_1 telles que K' et K'_1 soient simplicialement homéomorphes ?*

Dans le travail déjà cité, M.Nöbeling répond par l'affirmative à cette question.

II.— Groupes d'homologie.

Chaînes. Soit K un complexe simplicial. Fixons l'orientation de chaque simplexe de K et désignons par E_i^r les simplexes orientés ainsi considérés, l'indice supérieur indiquant la dimension. Une *chaîne à r dimensions* est une forme linéaire^[8] par rapport aux symboles E_i^r

$$C^r = \sum_i u_i E_i^r$$

où u_i désigne un entier positif, négatif ou nul ; dans le cas d'un complexe infini nous supposons de plus qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres u_i qui soient différents de zéro.

Chaîne-frontière. Soit E^r le simplexe orienté $\varepsilon(P_0 P_1 \dots P_r)$ où $\varepsilon = \pm 1$. On peut associer à E^r une chaîne appelée chaîne-frontière et définie par :

$$F(E^r) = \varepsilon \sum (-1)^i (P_0 P_1 \dots P_{i-1} P_{i+1} \dots P_r)$$

La relation entre E^r et $F(E^r)$ s'exprime souvent par le symbole $(\rightarrow) : E^r \rightarrow F(E^r)$.^[9]

Relations d'incidence. Les chaînes-frontières des simplexes orientés de K sont définies par des relations

$$E_i^r \rightarrow \sum_j e_{ij}^r E_j^{r-1}, \quad (e_{ij}^r = 0, +1, -1)$$

appelées relations d'incidence de K .

À la chaîne $C^r = \sum u_i E_i^r$ est associée une chaîne-frontière définie par

$$C^r \rightarrow F(C^r) = \sum u_i F(E_i^r) = \sum_{i,j} u_i e_{ij}^r E_j^{r-1}$$

On a :

$$F(E^r) \rightarrow 0, \quad \text{d'où } F(C^r) \rightarrow 0$$

Un complexe K est complètement déterminé par ses relations d'incidence. Nous nous proposons de déduire de ces relations d'incidence des invariants topologiques de K .

Chaînes par rapport à un groupe abélien G . Soit G un groupe abélien additif quelconque. Une chaîne par rapport à G est une forme linéaire finie

$$C^r = \sum_i u_i E_i^r$$

les symboles u_i désignent des éléments de G . La somme de deux chaînes $\sum_i u_i E_i^r$ et $\sum_i v_i E_i^r$ sera la chaîne $\sum_i (u_i + v_i) E_i^r$. Les chaînes C^r forment donc un groupe abélien \mathcal{L}_G^r .

À la chaîne $\sum u_i E_i^r$ on peut associer la chaîne $\sum_{i,j} e_{ij}^r E_j^{r-1}$ appelée *chaîne-frontière par rapport à G*

$$\sum_i u_i E_i^r \xrightarrow{G} \sum_{i,j} u_i e_{ij}^r E_j^{r-1}$$

Cette correspondance définit un homomorphisme du groupe \mathcal{L}_G^r sur un sous-groupe \mathcal{H}_G^{r-1} de \mathcal{L}_G^{r-1} . Dans cet homomorphisme, les chaînes de \mathcal{L}_G^r qui correspondent à la chaîne 0 de \mathcal{H}_G^{r-1} définissent un sous-groupe \mathcal{Z}_G^r de \mathcal{L}_G^r . Une chaîne Γ^r appartenant à \mathcal{Z}_G^r s'appelle aussi cycle par rapport à G ; on a $\Gamma^r \xrightarrow{G} 0$. Le groupe \mathcal{H}_G^{r-1} est un sous-groupe du groupe \mathcal{Z}_G^{r-1} .^[10] Un cycle Γ^{r-1} de \mathcal{H}_G^{r-1} est la chaîne-frontière d'une chaîne $C^r : C^r \xrightarrow{G} \Gamma^{r-1}$. On exprime ce fait en disant que Γ^{r-1} est *homologue à 0 par rapport à G* , et on écrit $\Gamma^{r-1} \underset{G}{\sim} 0$. Deux cycles Γ^{r-1} et Γ_1^{r-1} sont dits *homologues par rapport à G* , si $\Gamma_1^{r-1} - \Gamma^{r-1} \underset{G}{\sim} 0$; on écrit aussi $\Gamma_1^{r-1} \underset{G}{\sim} \Gamma^{r-1}$

Groupes d'homologie par rapport à G . Soit \mathcal{K}_G^r le groupe quotient :

$$\mathcal{K}_G^r = \mathcal{Z}_G^r / \mathcal{H}_G^r$$

C'est le *groupe d'homologie* par rapport à G et correspondant à la dimension r . Un élément de \mathcal{K}_G^r peut être considéré comme la classe des cycles $\underset{G}{\sim}$ à un cycle donné Γ^r . Le groupe \mathcal{K}_G^r a été défini pour une subdivision simpliciale de l'espace topologique K ; mais nous verrons plus loin que c'est un invariant topologique de K : il ne dépend pas de la décomposition particulière en simplexes.

Le groupe \mathcal{K}_G^r dépend de G . Les cas les plus importants sont les suivants : 9/10

- (1) G est le groupe additif des nombres entiers. On a alors le groupe d'homologie proprement dit \mathcal{K}^r .
- (2) G est le groupe des restes modulo m des nombres entiers. On a alors le groupe d'homologie modulo m : $\mathcal{K}^r(\text{mod}.m)$. En particulier si $m = 2$, on peut faire abstraction de l'orientation des simplexes.

Supposons que K soit un complexe fini. Les groupes \mathcal{Z}^r et \mathcal{H}^r sont alors des groupes abéliens à un nombre fini de générateurs. Il en sera de même du groupe \mathcal{K}^r . Les éléments d'ordre fini de \mathcal{K}^r forment un sous-groupe \mathcal{T}^r appelé *groupe de torsion*. Un

élément de \mathcal{T}^r est de la classe des cycles homologues à un cycle Γ^r pour lequel on a : $t\Gamma^r \sim 0$, t étant un nombre entier. On convient d'écrire $\Gamma^r \approx 0$ pour un cycle qui satisfait à une homologie de la forme $t\Gamma^r \sim 0$; on convient de même d'écrire $\Gamma^r \approx \Gamma_1^r$ lorsqu'on a : $t\Gamma^r \sim t\Gamma_1^r$.

Groupe de Betti. Le groupe de Betti pour la dimension r est le groupe quotient

$$\mathcal{B}^r = \mathcal{K}^r / \mathcal{T}^r$$

Un élément de \mathcal{B}^r est de la classe des cycles Γ^r tels que $\Gamma^r \approx \Gamma_1^r$, où Γ_1^r est un cycle ^{10/11} donné. Le groupe \mathcal{B}^r est un groupe abélien *libre* à b^r générateurs. Le nombre b^r s'appelle le *nombre de Betti* pour la dimension r . On peut trouver b^r cycles $\Gamma_1^r, \Gamma_2^r, \dots, \Gamma_{b^r}^r$ tels que tout cycle Γ^r soit lié par une homologie de la forme :

$$\Gamma^r \approx \lambda_1 \Gamma_1^r + \lambda_2 \Gamma_2^r + \dots + \lambda_{b^r} \Gamma_{b^r}^r$$

Ces b^r cycles définissent *une base du groupe de Betti*.

Le groupe de torsion \mathcal{T}^r est la somme directe d'un certain nombre de groupes cycliques dont les ordres sont des entiers t_1, t_2, \dots, t_s . Ces entiers sont complètement déterminés si on impose les conditions :

$$t_{i+1} \equiv 0 \pmod{t_i}$$

Les nombres t_i ainsi déterminés s'appellent *coefficients de torsion* pour la dimension r .

Considérons de même le groupe $\mathcal{K}^r \pmod{m}$. Ce groupe est la somme directe de $b^r(m)$ groupes cycliques d'ordre m et d'un certain nombre de groupes cycliques ayant respectivement pour ordres des entiers $t_1(m), t_2(m), \dots, t_\sigma(m)$ inférieurs à m et tels que

$$t_{i+1}(m) \equiv 0 \pmod{t_i(m)}.$$

Le nombre $b^r(m)$ et les nombres $t_i(m)$ s'appellent respectivement *nombre de Betti* et *coefficients de torsion modulo m* .^[11]

^{11/12} Les invariants numériques précédents déterminent complètement les groupes \mathcal{K}^r et $\mathcal{K}^r \pmod{m}$. On peut les calculer effectivement quand on connaît les relations d'incidence de K . Soit (e^r) la *matrice d'incidence* formée par les coefficients e_{ij}^r . Les coefficients de torsion t_i pour la dimension r sont les diviseurs élémentaires supérieurs à 1 de la matrice (e^r) . Le nombre de Betti b^r est donné par

$$b^r = \alpha^r - \rho^r - \rho^{r-1}$$

où α^r désigne le nombre de simplexes E_i^r à r dimensions, ρ^r étant le rang de la matrice (e^r) . De l'égalité précédente on tire :

$$\sum_r (-1)^r \alpha^r = \sum_r (-1)^r b^r$$

On a de même :

$$\sum_r (-1)^r \alpha^r = \sum_r (-1)^r b^r(m)$$

La quantité $\sum_r (-1)^r \alpha^r$ s'appelle *caractéristique d'Euler-Poincaré* du complexe K . C'est un invariant topologique comme les nombres de Betti. (Pour les démonstrations, voir Seifert-Threlfall, chap.III et XII).

Groupes d'homologie modulo L . Soit L un sous-complexe de K . On peut convenir de négliger partout dans les chaînes les simplexes appartenant à L . On définit ainsi les chaînes mod. L , les cycles mod. L , les groupes d'homologie mod. L . D'une façon générale, on aura le groupe d'homologie $\mathcal{K}_G^r(\text{mod.}L)$.

12/13

III.— Invariance topologique des groupes d'homologie. Pour démontrer l'invariance topologique du groupe \mathcal{K}_G^r nous allons montrer que ce groupe est isomorphe à un groupe $\overline{\mathcal{K}}_G^r$ que nous appellerons groupe d'homologie topologique.^[12] Pour éviter toute confusion, \mathcal{K}_G^r sera appelé groupe d'homologie combinatoire. Cela nous oblige à introduire les notions de simplexe régulier et de chaîne singulière.

Simplexe singulier. Soit x^r un simplexe rectiligne et considérons une représentation continue (pas nécessairement biunivoque) de x^r sur un ensemble de points A d'un espace topologique K . L'ensemble de points A associé à la représentation continue de x^r sur A définit un *simplexe singulier* X^r sur K . Étant donné sur K deux simplexes singuliers X^r et X_1^r images continues des simplexes rectilignes x^r et x_1^r , on dit que les deux simplexes singuliers sont identiques lorsqu'ils coïncident en tant qu'ensembles de points et lorsqu'il existe une correspondance barycentrique entre x^r et x_1^r telle que deux points correspondants de x^r et x_1^r aient pour image le même point de K . Une représentation continue de x^r sur K fait correspondre aux deux simplexes orientés x^r et $-x^r$ deux simplexes singuliers orientés X^r et $-X^r$. Il se peut qu'il existe une correspondance barycentrique entre x^r et $-x^r$ telle que deux points correspondants soient représentés par le même point de K . On a alors $X^r = -X^r$ et on dit que X^r est un simplexe dégénéré singulier.

13/14

Exemple. Considérons une représentation barycentrique t d'un simplexe rectiligne E^r sur un simplexe rectiligne E^{r-h} où $h > 0$. Le simplexe E^{r-h} définit alors un simplexe singulier X^r . Le simplexe E^r admet au moins deux sommets P_0 et P_1 qui soient représentés sur un même sommet de E^{r-h} . Considérons la transformation barycentrique de E^r en $-E^r$ qui échange les sommets P_0 et P_1 et qui laisse fixes les autres sommets de E^r . Deux points correspondants de E^r et de $-E^r$ sont évidemment représentés par t sur le même point de E^{r-h} ou X^r . Par suite X^r est un simplexe singulier dégénéré.

Chaînes singulières. Une chaîne singulière sera une forme linéaire finie $\sum_i u_i X_i^r$, où les symboles X_i^r désignent des simplexes singuliers *non dégénérés* définis sur un complexe K , les coefficients u_i étant des nombres entiers. Supposons que X^r soit une image continue d'un simplexe rectiligne x^r . Les faces x_i^{r-1} de x^r sont représentées sur

des simplexes singuliers X_i^{r-1} appelés faces de X^r . Soit $\sum e_i x_i^{r-1}$ la chaîne frontière de x^r . Nous appellerons *chaîne-frontière de X^r* la chaîne singulière $\sum e_i X_i^{r-1}$, où l'on néglige tous les simplexes singuliers dégénérés.

Chaînes singulières par rapport à un groupe abélien G . Une chaîne singulière par rapport à G sur un complexe K sera une forme linéaire finie

$$C^r = \sum_i u_i X_i^r \quad (u_i = \text{élément de } G)$$

les symboles X_i^r désignant des simplexes singuliers non dégénérés sur K . À la chaîne C^r est associée une chaîne frontière par rapport à G :

$$\begin{aligned} X_i^r &\longrightarrow \sum_j e_{ij} X_j^{r-1} \\ C^r &\xrightarrow{G} \sum_{i,j} u_i e_{ij} X_j^{r-1} \end{aligned}$$

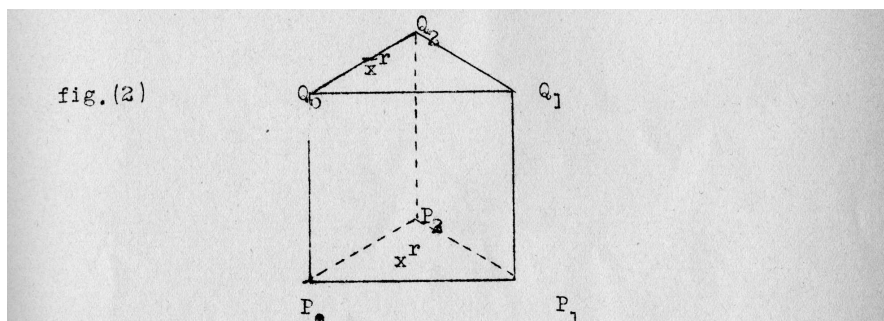
Groupes d'homologie topologiques. L'ensemble des chaînes singulières sur un complexe donné K permet de définir les groupes abéliens suivants :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{L}}_G^r &= \text{groupe des chaînes singulières par rapport à } G, \\ \overline{\mathcal{Z}}_G^r &= \text{groupe des cycles singuliers par rapport à } G, \\ \overline{\mathcal{H}}_G^r &= \text{groupe des cycles singuliers } \simeq 0, \\ \overline{\mathcal{K}}_G^r &= \overline{\mathcal{Z}}_G^r / \overline{\mathcal{H}}_G^r = \text{groupe d'homologie topologique} \end{aligned}$$

Il est évident que tous ces groupes sont des invariants topologiques du complexe K ; car une transformation topologique de K en un complexe K_1 transforme toute chaîne singulière C^r sur K en une chaîne singulière C_1^r sur K_1 , la chaîne-frontière de C^r correspondant à la chaîne-frontière de C_1^r . Je me propose de démontrer maintenant le fait remarquable et surprenant que le groupe d'homologie topologique $\overline{\mathcal{K}}_G^r$ est isomorphe au groupe d'homologie \mathcal{K}_G^r défini précédemment. Il en résultera l'invariance topologique des groupes d'homologie combinatoire \mathcal{K}_G^r .

Déformations continues. Soit a un espace topologique et considérons une représentation continue de a sur un ensemble de points A d'un espace topologique K . Désignons par $[1]$ l'intervalle fermé $(0, 1)$ et soit $a \times [1]$ le produit topologique de a par $[1]$. Désignons par a_t l'ensemble des points de $a \times [1]$ qui correspondent au point t de l'intervalle $[1]$. Considérons une représentation continue de $a \times [1]$ dans l'espace K telle que a_0 soit représenté sur A et a_1 sur \overline{A} . Une telle déformation continue s'appelle aussi *homotopie*. En particulier, lorsque l'image A_t de a_t est homéomorphe à a_t quelque soit t , la déformation continue est appelée *isotopie*.

Déformation continue d'un simplexe singulier. Soit x^r un simplexe rectiligne. Le produit $x^r \times [1]$ peut être considéré comme un prisme dont les deux bases seront désignées par x^r et \overline{x}^r . Soient P_0, P_1, \dots, P_r les sommets du simplexe x^r et



Q_0, Q_1, \dots, Q_r les sommets correspondants du simplexe \bar{x}^r . On peut décomposer le prisme en simplexes. Soit x_i^{r+1} le simplexe orienté $(Q_0, Q_1, \dots, Q_i, P_i, \dots, P_r)$. On peut associer au prisme $x^r \times [1]$ la chaîne orientée suivante

$$\mathcal{D}x^r = \sum (-1)^{i-1} x_i^{r+1}$$

que nous appellerons *chaîne de déformation* du simplexe x^r . La même loi associe à une face x_i^{r-1} de x^r , une chaîne de déformation $\mathcal{D}x_i^{r-1}$. Par suite, à la chaîne-frontière $F(x^r) = \sum \varepsilon_i x_i^{r-1}$ correspond la chaîne de déformation $\mathcal{D}F(x^r) = \sum \varepsilon_i \mathcal{D}x_i^{r-1}$. La chaîne-frontière de $\mathcal{D}x^r$ est donnée par la relation suivante :

$$\mathcal{D}x^r \longrightarrow \bar{x}^r - x^r - \mathcal{D}F(x^r)$$

Considérons maintenant une représentation continue du prisme $x^r \times [1]$ dans l'espace K . On définit ainsi une déformation continue du simplexe singulier X^r , image de x^r . À la chaîne $\mathcal{D}x^r$ correspond dans K une chaîne singulière $\mathcal{D}X^r$ appelée chaîne de déformation de X^r . À la chaîne $\mathcal{D}F(x^r)$ correspond une chaîne singulière $\mathcal{D}(F(X^r))$, et on a :

$$\mathcal{D}X^r \longrightarrow \bar{X}^r - X^r - \mathcal{D}(F(X^r))$$

Déformation continue d'une chaîne singulière. Soit c un complexe simplicial et soit C le complexe singulier obtenu par une représentation continue de c dans l'espace K . Une déformation continue de C en un autre complexe singulier \bar{C} est définie par une représentation continue dans K du produit topologique $c \times [1]$. À chaque simplexe singulier X^r de C correspond un simplexe déformé \bar{X}^r de \bar{C} et une chaîne de déformation $\mathcal{D}X^r$. Soit $C^r = \sum_i u_i X_i^r$ une chaîne singulière formée de simplexes de C , les coefficients u_i étant des éléments d'un groupe abélien G . À cette chaîne C^r correspond une chaîne de déformation

$$\mathcal{D}C^r = \sum_i u_i \mathcal{D}X_i^r$$

Soit $\bar{C}^r = \sum_i u_i \bar{X}^r$ la chaîne déformée. On a la relation :

$$\mathcal{D}C^r \xrightarrow{G} \bar{C}^r - C^r - \mathcal{D}F(C^r)$$

En particulier si $F(C^r) = 0$, on a :

$$\mathcal{D}C^r \xrightarrow{G} \bar{C}^r - C^r$$

^{18/19} donc $\bar{C}^r \underset{G}{\sim} C^r$. C'est-à-dire : *deux cycles singuliers homotopes (qui se déduisent l'un de l'autre par une homotopie) sont aussi homologues.*

Nous pouvons démontrer maintenant le théorème fondamental qui établit un lien entre les chaînes singulières et les sous-chaînes d'un complexe simplicial K .^[13]

Théorème fondamental sur les déformations (Alexander, Veblen)

- 1.– *Tout complexe singulier sur K admet une subdivision qu'on peut déformer en un sous-complexe de K .*
- 2.– *Toute chaîne singulière C^r sur K admet une subdivision qu'on peut déformer en une sous-chaîne de K , les chaînes considérées étant définies par rapport à un groupe abélien G .*

Soit C un complexe singulier sur K . On peut subdiviser les simplexes singuliers de C en simplexes suffisamment petits de façon qu'on obtienne une subdivision C' de C jouissant de la propriété suivante : il existe au moins un aster^[14] du complexe K contenant à son intérieur un aster singulier quelconque du complexe C' ; (on appelle aster de centre O l'ensemble des simplexes d'un complexe donné ayant le point O comme sommet). À chaque sommet P_λ de C' , faisons alors correspondre un sommet ^{19/20} Q_λ de K tel que l'aster singulier de centre P_λ soit contenu dans l'aster de centre Q_λ . De cette façon, nous faisons correspondre aux sommets d'un simplexe singulier de C' les sommets d'un simplexe de K . En effet, soit P un point quelconque d'un simplexe singulier X^r de C . Soit E^k un simplexe de K contenant le point P . Tout aster de K qui contient P contient E^k . Donc les sommets de X^r ne peuvent correspondre qu'à des sommets de E^k ; c'est-à-dire les sommets de X^r correspondant aux sommets d'un simplexe E^h qui appartient à E^k . Soit c' un complexe rectiligne tel que le complexe singulier C' se déduise de c' par une représentation continue T . Appelons x^r un simplexe de c' qui est représenté sur X^r par T .^[15] La correspondance entre les sommets de X^r et ceux de E^h définit une représentation barycentrique de x^r sur E^h . On a ainsi une représentation barycentrique bien déterminée pour tous les simplexes de c' , ce qui fournit une représentation simpliciale \bar{T} de c' sur un sous-complexe \bar{C} de K . Un point P de x^r est représenté par T sur un point P de X^r et par \bar{T} sur un autre point \bar{P} de E^k . Les points P et \bar{P} appartiennent à un même simplexe, à savoir E^k , et peuvent être joints dans ce simplexe par un segment rectiligne bien déterminé. Le produit topologique $c' \times [1]$ admet alors une représentation continue f dans K définie de la façon suivante : f coïncide avec T pour l'ensemble de points $c' \times 0$, produit

topologique de c' par le point 0 de l'intervalle $[1]$; f coïncide avec T pour l'ensemble de points $c \times 1$; pour les points du segment $p \times [1]$, où p est un point donné de c' , f est la représentation barycentrique de ce segment sur le segment rectiligne $P\bar{P}$. La représentation continue f définit donc une déformation continue du complexe singulier C' en un sous-complexe \bar{C} de K . Ceci démontre la première partie du théorème. On peut encore l'exprimer de la façon suivante :

Toute représentation continue d'un complexe simplicial c dans un complexe simplicial K est homotope à une représentation simpliciale d'une subdivision c' de c dans le complexe K .

Pour démontrer la deuxième partie du théorème, nous considérons une chaîne singulière C^r sur K . L'ensemble de ses simplexes singuliers et de leurs faces forme un complexe singulier C . On peut trouver une subdivision C' de C qui soit déformable en un sous-complexe \bar{C} de K . Soit x^r un simplexe rectiligne et orienté; nous pouvons subdiviser x^r en un certain nombre de simplexes partiels x_i^r et orienter chacun des simplexes partiels x_i^r de telle façon que la transformation linéaire qui fait passer du simplexe orienté x_i^r au simplexe orienté x^r soit une transformation à déterminant positif dans l'espace cartésien à r dimensions défini par x^r . La somme des simplexes orientés x_i^r sera appelée *subdivision* de la chaîne définie par le simplexe orienté x^r . De cette notion se déduit immédiatement la notion de *subdivision d'un simplexe singulier ou d'une chaîne singulière*. À la chaîne singulière C^r correspond donc sur C' une chaîne singulière bien déterminée, C_1^r , appelée subdivision de C^r . En déformant C' en \bar{C} , nous faisons correspondre à C_1^r une chaîne \bar{C}_1^r qu'on appelle chaîne déformée et qui est composée de simplexes de K . Ceci démontre le théorème.

Nous aurons encore besoin de la propriété suivante :

La subdivision C_1^r de la chaîne singulière C^r peut être déformée en C^r sur le complexe singulier C .

Il suffit de démontrer cette propriété pour le cas de chaînes non singulières. Or si C est une sous-chaîne de K , et C_1^r une subdivision de C^r , on peut montrer que la déformation définie plus haut réduit C_1^r à C^r , tout point de C_1^r restant pendant la déformation sur le simplexe de C^r auquel il appartient initialement. En particulier tout cycle singulier est homologue à l'une quelconque de ses subdivisions.

Invariance topologique des groupes d'homologie. D'après le théorème fondamental et la propriété précédente, tout cycle singulier Γ^r sur le complexe K est homologue à un sous-cycle $\bar{\Gamma}^r$ de K , les cycles étant définis par rapport à un groupe abélien donné G . Si Γ^r est homologue à 0, $\bar{\Gamma}^r$ est aussi homologue à 0; c'est-à-dire, il existe une chaîne singulière C^{r+1} telle que $C^{r+1} \xrightarrow{G} \bar{\Gamma}^r$. En vertu du théorème fondamental il existe alors également une sous-chaîne \bar{C}^{r+1} de K telle que $\bar{C}^{r+1} \xrightarrow{G} \Gamma^r$; c'est-à-dire Γ^r est aussi homologue à 0 au sens combinatoire. La correspondance entre Γ^r et $\bar{\Gamma}^r$ établit donc une correspondance biunivoque entre les groupes $\bar{\mathcal{K}}_G^r$ et \mathcal{K}_G^r . Donc :

Théorème. *Les groupes d'homologie \mathcal{K}_G^r d'un complexe K sont des invariants topologiques de K .*

Invariance topologique des groupes $\mathcal{K}_G^r(\text{mod.}L)$. Soit L un sous-complexe de K . D'une chaîne singulière sur K on déduit une chaîne singulière modulo L en y supprimant tous les simplexes qui sont situés sur L . À l'aide des chaînes singulières modulo L on peut définir des groupes d'homologie topologiques désignés par $\overline{\mathcal{K}}_G^r(\text{mod.}L)$. Il résulte du théorème fondamental sur les déformations que le groupe $\overline{\mathcal{K}}_G^r(\text{mod.}L)$ est isomorphe au groupe d'homologie combinatoire $\mathcal{K}_G^r(\text{mod.}L)$. Donc les groupes $\mathcal{K}_G^r(\text{mod.}L)$ sont des invariants topologiques de l'ensemble du complexe K et de son sous-complexe L . Monsieur S.Lefschetz a démontré que ces groupes sont même des invariants topologiques de l'espace $K - L$.^[16]

23/24

Remarques sur la détermination effective des groupes d'homologie. Théoriquement les groupes d'homologie peuvent être déterminés à partir des relations d'incidence du complexe K . Mais cette méthode ne peut être appliquée pratiquement lorsque K est composé d'un grand nombre de simplexes. On trouvera une méthode pratique ainsi que de nombreuses applications dans ma thèse : Sur la topologie de certains espaces homogènes (Ann. of Mathematics, 35, 1934, p.411). Mais avant de terminer, il est indispensable d'indiquer au moins les groupes d'homologie de l'espace S^n , espace sphérique à n dimensions. L'espace S^n est homéomorphe à la frontière d'un simplexe E^{n+1} . Le cycle $F(E^{n+1})$ est un cycle à n dimensions défini sur S^n . Tout autre cycle à n dimensions est homologue à un multiple de celui-ci. Donc \mathcal{K}^n est le groupe cyclique infini : $b^n = 1$. L'espace S^n est aussi l'espace R^n que l'on suppose fermé par un point à l'infini. Or toute chaîne C^r sur R^n , où $r < n$, peut être réduite au point à l'infini par déformation continue (par ex. par une homothétie dont le rapport tend vers l'infini). Donc le groupe \mathcal{K}^r se réduit à 0, pour $0 < r < n$. Le groupe \mathcal{K}^0 est le groupe cyclique infini. Il n'y a pas de coefficients de torsion. Les nombres de Betti sont

$$b^0 = b^n = 1, \quad b^r = 0 \text{ pour } 0 < r < n$$

Remarquons encore que pour tout complexe de dimension n , les groupes \mathcal{K}^r , où $r > n$, se réduisent à 0.

Bibliographie. Pour une étude plus détaillée du sujet de cet exposé, voir :

G.[S.] Lefschetz, Topology, chapitres I et II.

Seifert und Threlfall : Lehrbuch der Topologie, chapitres II, III et IV.

Notes

1. Outre les ouvrages cités dans la courte bibliographie (les livres de Lefschetz [Lef30] et de Seifert et Threlfall [ST34]), l'exposé mentionne l'article [Nöb35] de Georg Nöbeling et

la thèse [Ehr34] de l'auteur. Dans l'exemplaire de l'IHP, une main a ajouté au crayon le livre [Veb22] d'Oswald Veblen à la fin de la bibliographie.

2. À notre connaissance, le texte de cet exposé a été tapé au moins trois fois (sans compter la présente). Il y a eu une première frappe sur stencil, dont est issu l'exemplaire de la bibliothèque de l'IRMA. Celui de l'IHP est né d'une frappe différente et postérieure. Le texte de l'exposé a été retapé pour son inclusion et sa publication [Ehr83, p. 455] dans les Œuvres complètes de Charles Ehresmann en 1983. Quelques différences entre ces différents textes (par exemple, le fait que « Étant donnés » est systématiquement accordé dans la frappe IHP et systématiquement pas accordé dans les deux autres indiquent que le texte des Œuvres complètes a été retapé à partir d'un exemplaire identique à celui de l'IRMA (qui, bien sûr, devait être l'exemplaire personnel d'Ehresmann)). Nous avons conservé le « non-accord » de l'exemplaire de l'IRMA.

3. De même que le mot cercle désignait un disque, le mot sphère désignait encore une boule.

4. Ici comme dans les exposés de cette troisième année du séminaire, le mot « représentation » désigne ce que nous appelons aujourd'hui une application. Une représentation barycentrique est une application affine.

5. Simplexe rectiligne désigne le simplexe affine de l'espace affine R^n .

6. C'est-à-dire affine.

7. Dans ces exposés, il y a en général fort peu d'exemples.

8. Ici et ailleurs dans cet exposé, « forme » linéaire désigne une combinaison linéaire.

9. Le symbole \rightarrow vient d'Alexander [Ale26]. Le « F -comme-frontière » était utilisé par Lefschetz [Lef30], par exemple, en anglais ; c'est le « $\mathcal{R}\partial$ -comme-Rand » de Seifert et Threlfall, qui s'abrègera bientôt en ∂ , une notation — par hasard — très bien adaptée (penser à la formule de Stokes) et qui restera.

10. Là il y aurait quelque chose à vérifier, à savoir que les chaînes frontières sont fermées.

11. C'est la première apparition des nombres de Betti dans le séminaire. La terminologie mérite une petite note historique. Poincaré a utilisé (et peut-être était-il le premier) l'expression « nombres de Betti » (c'est le titre de la section 6 de l'*Analysis situs* [Poi53] — signalons que ses nombres de Betti étaient ceux présentés ici et auxquels nous sommes habitués, augmentés de 1). Les notes historiques de Bourbaki [Bou84, p. 177] attribuent, au vu des Œuvres de Riemann et de lettres de Betti, l'invention des nombres de Betti à Riemann. André Weil connaissait bien les Œuvres de Riemann [Rie92], qu'il fréquentait depuis son jeune âge (voir par exemple [Aud11, p. 451]). Ajoutons une information peut-être inédite. En 1909, et encore en 1923–24, Henri Lebesgue utilisait « nombres de Betti » (voir [Leb04, Lettre du 30 septembre 1909]). Mais en 1925, dans son cours au Collège de France sur l'*Analysis situs*, il utilisa aussi « nombres de Riemann-Betti ». Ce cours a été suivi par certains des futurs orateurs du séminaire — peut-être pas par Ehresmann, qui était élève de première année à l'ENS, mais en tout cas par Henri Cartan, puisque l'information provient d'un du cahier dans lequel il a pris des notes pendant ce cours (archives Cartan, voir aussi l'article [Aud12]). Weil revint sur Riemann et Betti en 1979 [Wei79].

12. Ici la distinction entre l'espace topologique K et le complexe simplicial K , restée floue dans les définitions (page 4 de l'exposé), est nécessaire.

13. L'énoncé qui suit vient du livre de Lefschetz [Lef30, p. 86], où il est attribué à Alexander [Ale15] pour les variétés et à Veblen [Veb22] pour les complexes.

14. Le mot aster vient de l'*Analysis situs* de Poincaré [Poi53, p. 233]. L'allemand est *Stern*. Le mot étoile a prévalu.

15. La phrase précédente manque dans l'exemplaire de l'IHP.

16. Voir [Lef30, Chap. II].

Références

- [Ale15] J. ALEXANDER – « A proof of the invariance of certain constants of analysis situs », *Transactions A. M. S.* **16** (1915), p. 148–154.
- [Ale26] ———, « Combinatorial analysis situs », *Transactions A. M. S.* **28** (1926), p. 301–329.
- [Aud11] M. AUDIN – *Correspondance entre Henri Cartan et André Weil*, Documents mathématiques, Société mathématique de France, Paris, 2011.
- [Aud12] ———, « Cartan, Lebesgue, de Rham et l’analysis situs dans les années 1920 Scènes de la vie parisienne », *Gazette des mathématiciens* **134** (2012), p. 49–75.
- [Bou84] N. BOURBAKI – *Éléments d’histoire des mathématiques*, Masson, Paris, 1984.
- [Ehr34] C. EHRESMANN – « Sur la topologie de certains espaces homogenes. », *Ann. of Math.* **35** (1934), p. 396–443.
- [Ehr83] ———, *Œuvres complètes et commentées. I-1,2. Topologie algébrique et géométrie différentielle*, Cahiers Topologie Géom. Différentielle, 1983, Édité par Andrée Charles Ehresmann.
- [Leb04] H. LEBESGUE – *Les lendemains de l’intégrale, lettres d’Henri Lebesgue à Émile Borel*, Vuibert, Paris, 2004.
- [Lef30] S. LEFSCHETZ – *Topology*, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 12, American Mathematical Society, New York, 1930.
- [Nöb35] G. NÖBELING – « Zur Topologie der Mannigfaltigkeiten », *Mb. Math. Phys.* **42** (1935), p. 117–152.
- [Poi53] H. POINCARÉ – *Œuvres, Volume VI*, Gauthier-Villars, Paris, 1953.
- [Rie92] B. RIEMANN – *Gesammelte mathematische Werke*, Teubner, 1892.
- [ST34] H. SEIFERT & W. THRELFALL – *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1934.
- [Veb22] O. VEBLÉN – *The Cambridge Colloquium, 1916. Part II : O. Veblen. Analysis Situs. (Amer. Math. Soc., Colloquium Lectures, vol. V.)*, Amer. Math. Soc., New York, 1922.
- [Wei79] A. WEIL – « Riemann, Betti and the birth of topology », *Arch. Hist. Exact Sci.* **20** (1979), p. 91–96.