

# LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par  
Michèle Audin

## 2. Année 1934-1935 *Espace de Hilbert*

André Weil

Mesure de Haar

*Séminaire de mathématiques* (1934-1935), Exposé 2-H, 11 p.

<[http://books.cedram.org/MALSM/SMA\\_1934-1935\\_\\_2\\_\\_H\\_0.pdf](http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1934-1935__2__H_0.pdf)>



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

cedram

*Exposé mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## MESURE DE HAAR

par André Weil

1.— La définition des groupes est connue.<sup>[1]</sup> L'ensemble des éléments d'un groupe abstrait  $G$  sera considéré comme un espace, l'espace du groupe : y opèrent transitivement deux groupes de transformations : groupe des translations à gauche, qui font correspondre à tout point  $x$  le point  $s^{-1}x$ ,  $s$  étant un élément fixe arbitraire ; et groupe des translations à droite, faisant correspondre à  $x$  le point  $xs$  ; ces groupes, isomorphes à  $G$ , portent dans la théorie de Lie le nom de premier et second groupe des paramètres. Opèrent également dans l'espace du groupe le groupe des automorphismes dont nous n'aurons pas à faire usage, et le groupe  $\Gamma$  des automorphismes intérieurs ou groupe adjoint : c'est le groupe des transformations par un élément du groupe, faisant correspondre à tout élément  $x$  l'élément  $s^{-1}xs$  ; il est homomorphe<sup>[2]</sup> à  $G$ , et l'ensemble des éléments de  $G$  auxquels correspond dans  $\Gamma$  la transformation identique est (par définition) le centre de  $G$ . L'on désignera par  $sE$ ,  $Es$ ,  $E^{-1}$ , les ensembles transformés d'un sous-ensemble  $E$  de  $G$  par les transformations  $(x \rightarrow sx)$ ,  $(x \rightarrow xs)$ ,  $(x \rightarrow x^{-1})$  respectivement, et par  $E \cdot F$  ( $E$ ,  $F$  étant deux sous-ensembles quelconques) l'ensemble des produits d'un élément de  $E$  par un élément de  $F$ .

Si dans le groupe  $G$ , l'on se donne un sous-groupe  $g$ , les éléments de  $G$  se répartissent en *classes suivant  $g$*  (Nebengruppen), c'est à dire en ensembles  $xg$  (ce sont des classes à gauche ; il y a aussi, suivant  $g$ , une répartition en classes à droite  $gx$ , mais pour unifier les notations nous n'en ferons jamais usage). Les classes  $xg$  sont transformées entre elles, transitivement, par le groupe des translations à gauche : si on les considère comme les points d'un ensemble  $H$ ,  $H$  sera donc le champ d'un groupe de transformations transitif homomorphe à  $G$  ; on dira que c'est l'espace homogène défini par  $g$  dans  $G$ , et on écrira  $H = G/g$ . Si  $g$  est un sous-groupe invariant,  $H$  est l'espace du groupe quotient ; en général,<sup>[3]</sup> le groupe des transformations de  $H$  est le quotient de  $G$  par le plus grand sous-groupe invariant de  $g$  contenu dans  $G$  : si l'on n'a en vue que l'étude des espaces homogènes, on pourra donc supposer que  $g$  ne contient aucun sous-groupe invariant.  $g$ , considéré comme point de  $H$ , sera noté  $0$  ; la classe  $xg$ , considérée de même, sera notée  $P = x0$  ; les transformations de  $H$  qui

laissent 0 invariant sont celles qui correspondent aux éléments de  $g$ , celles qui laissent invariant  $P = x0$  sont celles du groupe transformé  $xgx^{-1}$ .<sup>[4]</sup>

Une fonction  $f(x)$  définie pour tous les éléments  $x$  du groupe, et prenant, soit des valeurs réelles, soit des valeurs complexes, sera appelée une fonction du groupe. Une fonction  $f(P)$  des points d'un espace homogène  $H = G/g$  n'est pas autre chose qu'une fonction du groupe  $G$ , constante sur chaque classe suivant  $g$ . Nous utiliserons, dans ce qui va suivre, la théorie moderne de la mesure et de l'intégration donnée par M. de Possel, dans l'exposé A.

2.- Soit un espace homogène où opère un groupe de transformations  $G$ ; supposons que ce soit un espace mesuré, et que la mesure  $y$  soit invariante par  $G$ . Alors,  $E$  étant un ensemble mesurable quelconque,  $s$  un élément de  $G$ , le transformé  $sE$  de  $E$  sera mesurable, et l'on aura,  $m$  désignant la mesure

$$m(sE) = mE$$

Il en résulte que l'intégrale sera aussi invariante; si on la note par  $f(P) dP$ ,  $f(sP)$  sera mesurable en même temps que  $f(P)$ , et l'on aura,  $f$  étant intégrable (ou bien non-négative et mesurable)<sup>[5]</sup> :

$$f(P) dP = f(sP) dP.$$

Une différentielle étant un symbole de mesure, on peut exprimer l'égalité de deux mesures par l'égalité symbolique de deux différentielles, donc ici :

$$d(sP) = dP$$

Nous ne nous occuperons, dans cet exposé, que des espaces mesurés homogènes. S'il s'agit plus particulièrement de l'espace de groupe d'un groupe  $G$ , la mesure sera notée  $m$  et l'intégrale  $\int f(x) dx$ ;  $m$  sera dite une *mesure invariante* (plus précisément, *invariante à gauche*), cette invariance s'exprimant par l'une des égalités :

$$mE = m(sE), \quad \int f(x) dx = \int f(sx) dx, \quad d(sx) = dx$$

Si de plus  $m$  est invariante par la transformation ( $x \rightarrow x^{-1}$ ) l'on aura :

$$mE = m(sE) = m(E^{-1}) = m(E^{-1}s^{-1}) = m(t^{-1}E^{-1}s^{-1}) = m(sEt)$$

3/4 d'où

$$\int f(x) dx = \int f(sxt) dx = \int f(x^{-1}) dx$$

$$dx = d(sxt) = d(x^{-1})$$

Nous dirons alors que la mesure est *bi-invariante* : elle est invariante à la fois à gauche et à droite.

La notion de produit de mesures permet de définir une mesure invariante dans le produit direct de deux ou plusieurs groupes (en nombre fini) si l'on connaît une mesure invariante dans chacun des groupes facteurs. Si la mesure dans chacun des groupes

facteurs est bi-invariante, le produit des mesures sera une mesure bi-invariante dans le groupe produit.

**3.-** Il arrive en général que dans les groupes que l'on peut avoir à étudier ce n'est pas une mesure qui est donnée a priori, mais une topologie. Tel est, par exemple, le cas des groupes de Lie : pour ceux-ci, Hurwitz avait montré en 1877, en utilisant un invariant intégral facile à construire, qu'il existe bien une mesure invariante. Mais l'existence d'une telle mesure dans une classe très étendue de groupes topologiques n'a été démontrée qu'en 1933 : c'est à Haar que l'on doit cette belle et importante découverte, que nous allons exposer maintenant.

Considérons d'abord, d'une manière générale, un espace satisfaisant aux conditions suivantes :

- 1.- une topologie  $\gamma$  est définie par un système de voisinages (au sens de Hausdorff) ; 4/5
- 2.- la famille de voisinages peut être remplacée par une famille *dénombrable* (II<sup>ème</sup> axiome de dénombrabilité) ;
- 3.- l'espace est *localement compact* : tout point  $P$  possède au moins un voisinage compact <sup>(1)</sup>. Il en résulte, comme on sait, que l'espace est *métrisable* : supposant qu'on y introduit une métrique, nous désignerons par  $\delta(E, E')$  la distance de deux ensembles  $E, E'$  (borne inférieure de la distance d'un point de  $E$  à un point de  $E'$ ), et par  $d(E)$  le diamètre de  $E$  (borne supérieure des distances de deux points de  $E$ ). Si un espace satisfait à ces conditions, c'est à dire s'il est métrisable, séparable et localement compact, tout sous-ensemble *fermé* peut encore être considéré comme un espace de même nature.

La théorie de la mesure sur ces espaces repose sur le théorème suivant, de Carathéodory <sup>(2)[7]</sup> : 5/6

*Soit  $\mu E$  une fonction de Carathéodory dans un espace topologique métrisable. Pour que tous les ensembles ouverts possèdent la propriété de Carathéodory, il faut et il suffit que  $\mu$  satisfasse à l'axiome suivant :*

I.- *Si deux ensembles  $E, E'$  ont une distance  $\delta(E, E') > 0$ , on a  $\mu(E + E') = \mu E + \mu E'$ .*

Si nous nous plaçons maintenant dans un espace satisfaisant aux conditions 1., 2., 3., la condition nécessaire et suffisante pour que  $\mu E$  soit fini sur tous les ensembles compacts est que l'on ait l'axiome :

II.- *Tout point  $P$  possède un voisinage de mesure finie.*

---

1. Nous ne suivons pas l'usage de beaucoup de mémoires modernes où la tendance apparaît de réserver le mot « compact » aux ensembles fermés. Pour nous, comme pour Fréchet et Hausdorff, un ensemble compact, dans un espace topologique, est un ensemble dont la fermeture est compacte<sup>[6]</sup>.

2. Carathéodory n'a développé sa théorie de la mesure que dans les espaces euclidiens : mais ses démonstrations s'appliquent sans changement au cas étudié ici.

De I et II résulte que *tous les ensembles ouverts* (et en particulier l'espace entier) et tous les ensembles de Borel sont mesurables. Une mesure  $\mu$  satisfaisant à I et II sera appelée une *mesure de Radon*, deux mesures de Radon étant considérées comme identiques si elles coïncident sur tous les ensembles ouverts (ou, ce qui revient au même, sur les ensembles fermés) : elles coïncident alors sur tous les ensembles de Borel. Pour une mesure de Radon, *toute fonction continue est mesurable* : l'intégrale correspondante  $\int f(P) d\mu$  sera appelée une intégrale de Radon-Stieltjes. Si d'ailleurs l'on se donne une fonction  $\mu\Omega$  définie seulement sur les ensembles ouverts  $\Omega$ , et satisfaisant sur ces ensembles aux axiomes I et II, on *peut la prolonger*, c'est à dire en déduire une mesure de Radon (dite « régulière ») coïncidant avec la fonction donnée sur les ensembles ouverts : il suffit pour cela de définir  $\mu E$ , quel que soit  $E$  comme la borne inférieure de  $\sum_i \Omega_i$  pour  $E \subset \mathfrak{G}(\Omega_i)$ .<sup>[8]</sup> *Cet énoncé subsiste si l'on remplace la famille des ensembles ouverts par la famille dénombrable  $\mathcal{F}_0$  formée par tous les voisinages compacts et par les réunions finies de tels voisinages.* On en déduit que les espaces  $L^p$  sont séparables : les combinaisons linéaires finies, à coefficients rationnels complexes, des fonctions caractéristiques des ensembles de  $\mathcal{F}_0$  y sont partout denses ; en particulier  $L^2$  est un espace hilbertien s'il ne se réduit pas à un espace à un nombre fini de dimensions (ce qui pourrait arriver si  $\mu$  s'annulait en dehors d'un ensemble fini de points).

Si  $\mu$  est une mesure de Radon, et  $f(P)$  une fonction non négative, intégrable sur tout ensemble mesurable compact,  $\mu_1(E) = \int_E f(P) d\mu$  est une mesure de Radon, dite de *base  $\mu$* .

4.— Un groupe  $G$  est appelé, comme on sait, *groupe topologique*, si son espace de groupe est défini comme espace topologique au sens de Hausdorff par une famille de voisinage[s]  $V$ , et si le produit  $y^{-1}x$  est une fonction *continue* de l'ensemble des deux éléments  $x, y$ . Les transformations  $(x \rightarrow sx)$ ,  $(x \rightarrow sx)$ ,  $(x \rightarrow x^{-1})$  sont alors continues ; et si  $\Omega$  est un ensemble ouvert,  $E$  un ensemble quelconque dans  $G$ ,  $\Omega E$  et  $E\Omega$  sont des ensembles ouverts. Un sous-groupe  $g$ , fermé dans  $G$ , est encore un groupe topologique ; l'espace homogène  $H = G/g$  est un espace topologique au sens de Hausdorff si on y prend pour voisinages les ensembles  $Vg$ <sup>(3)</sup>, et les transformations de  $G$  y sont continues. Si  $g$  est un sous-groupe invariant fermé, le groupe quotient  $G/g$  est un groupe topologique. Si  $g$  est à la fois ouvert et fermé (donc somme<sup>[9]</sup> de composantes connexes de  $G$ ), on voit facilement que  $H = G/g$  est un espace *discret*, où tout point possède un voisinage réduit à ce point. Par exemple,  $V$  étant un voisinage de l'unité tel que  $V = V^{-1}$ , et  $V^n$  l'ensemble des produits de  $n$  éléments de  $V$ , soit  $V^\infty$  la réunion de tous les  $V^n$  pour  $n = 1, 2, 3, \dots$  : c'est un groupe, ensemble de

3. Il n'en serait pas ainsi si l'on supposait seulement que le produit  $y^{-1}x$  est une fonction continue de *chacune* des variables  $x, y$ .

tous les produits finis d'éléments de  $V$ , qui est ouvert comme réunion d'ensembles ouverts, mais aussi fermé, car si  $s$  est un point d'accumulation de  $V^\infty$ , il y aura un point de l'un des  $V^n$  dans  $sV$ , et  $s$  sera dans  $V^{n+1}$ . Si  $V$  est connexe,  $V^\infty$  est alors la composante connexe de l'unité, donc un sous-groupe invariant, et le groupe quotient est discret. Si  $G$  lui-même est connexe, on voit qu'il est engendré par les éléments d'un voisinage quelconque.

8/9

**5.-** Nous allons démontrer maintenant qu'il existe dans un groupe de Haar une mesure de Radon et une seule, invariante à gauche, non identiquement nulle, et définie à un facteur constant près; cette mesure sera appelée la *mesure de Haar*, et sa valeur sur les ensembles de Borel sera désignée par  $m$ .

S'il s'agit d'un groupe de Lie, l'on sait définir localement au voisinage de l'unité un élément de volume que l'on peut transporter en tout autre point par le groupe des translations à gauche. De même, dans le cas général, nous commencerons par définir localement une mesure approximative. L'on s'appuyera sur le lemme suivant (ici comme par la suite  $\varphi_E$  désignera la fonction caractéristique de l'ensemble  $E$ , égale à 1 sur  $E$  et à 0 sur  $\mathfrak{C}E$ ) :

**Lemme.** *Supposons qu'il existe une mesure de Haar  $m$ . Soit  $V$  un voisinage compact de l'unité, tel que  $V = V^{-1}$ ;  $E$  un ensemble mesurable compact. Pour tout  $\varepsilon > 0$  l'on peut choisir des constantes  $c_\nu \geq 0$  et des éléments  $x_\nu$  dans  $EV$  de façon que l'on ait :*

$$\varphi_E(s) \leq \sum c_\nu \varphi_{x_\nu V}(s) \quad \text{quel que soit } s$$

et

$$\sum c_\nu \leq (1 + \varepsilon) \frac{m(EV)}{mV}.$$

Posons en effet  $E' = EV$  :  $E'$  sera ouvert, et tendra vers la fermeture  $\bar{E}$  de  $E$  (donc vers  $E$  si  $E$  est fermé) quand  $d(V)$  tend vers zéro; et choisissons (c'est toujours possible) une fonction continue  $\psi(x)$  telle que  $0 \leq \psi(x) \leq \varphi_V(x) = \varphi_V(x^{-1})$ , et que

9/10

$$\mu = \int \psi(x) dx \geq (1 - \varepsilon)mV.$$

L'on aura :

$$\varphi_E(s) \leq \frac{1}{\mu} \int_{E'} \psi(s^{-1}x) dx$$

car  $\psi(s^{-1}x)$  s'annule en dehors de  $E'$  quand  $s$  est dans  $E$ . Évaluons le second membre de l'intégrale de Riemann :  $\psi$  étant uniformément continue, si l'on considère  $E'$  comme une somme finie d'ensembles mesurables  $W_\nu$  de diamètres suffisamment petit, et qu'on choisisse dans chaque  $W_\nu$  un point  $x_\nu$  on aura :

$$\varphi_E(s) \leq \sum \frac{mW_\nu}{\mu} \psi(s^{-1}x_\nu) + \varepsilon$$

ce qui peut s'écrire :

$$(1 - \varepsilon)\varphi_E(s) \leq \sum \frac{mW_\nu}{\mu} \psi(s^{-1}x_\nu)$$

ou en posant  $c_\nu = \frac{mW_\nu}{\mu(1 - \varepsilon)}$

$$\begin{aligned} \varphi_E(s) &\leq \sum c_\nu \psi(s^{-1}x_\nu) \\ &\leq \sum c_\nu \varphi_V(s^{-1}x_\nu) = \sum c_\nu \varphi_V(x_\nu^{-1}s) = \sum c_\nu \varphi_{x_\nu V}(s) \end{aligned}$$

et l'on a bien

$$\sum c_\nu = \frac{mE'}{\mu(1 - \varepsilon)} \geq \frac{m(EV)}{(1 - \varepsilon)^2 mV}$$

$E, F$  étant deux ensembles quelconques, désignons par  $(E : F)$  la borne inférieure de  $\sum c_\nu$  pour tous les systèmes d'éléments  $x_\nu$  et de constantes  $c_\nu \geq 0$  tels que l'on ait

$$\varphi_E \leq \sum c_\nu \varphi_{x_\nu F}$$

<sup>10/11</sup> Si  $E$  et  $F$  sont mesurables, on en déduit en intégrant :  $mE \leq \sum c_\nu \cdot mF$ , d'où  $(E : F) \geq \frac{mE}{mF}$ . D'autre part, si  $E$  est compact et si  $F$  a des points intérieurs,  $E$  peut être recouvert par des ensembles  $x_\nu F$  en nombre fini, donc  $(E : F)$  est fini. L'on a de plus, dans les conditions du lemme :

$$\frac{mE}{mV} \leq (E : V) \leq \frac{m(EV)}{mV}$$

Soit  $V'_\nu$  une suite de voisinages de l'unité, de diamètres tendant vers zéro ; soit  $V_\nu = V'_\nu + V'^{-1}_\nu$ . L'on aura, si  $E$  et  $E_0$  sont fermés compacts :

$$\frac{mE}{mE_0} = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(E : V_\nu)}{(E_0 : V_\nu)}$$

La mesure de Haar, étant bien définie par cette égalité sur les ensembles fermés compacts, est donc unique (à un facteur près) si elle existe. Pour la construire par la méthode de Haar sans supposer a priori son existence, désignons par  $E_0$  un ensemble fermé compact, ayant des points intérieurs (ce sera l'unité de mesure), et par  $\Omega$  un ensemble quelconque pris dans la famille  $\mathcal{F}_0$  : les  $\Omega$  étant en infinité dénombrable, on pourra par le procédé diagonal, extraire de la suite  $V_\nu$  définie plus haut une suite partielle (qui sera encore notée  $V_\nu$ ) de façon que la limite

$$\lambda\Omega = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{(\bar{\Omega} : V_\nu)}{(E_0 : V_\nu)}$$

<sup>11/12</sup> existe pour tout  $\Omega$ .

Or on a  $(E : F) \geq 1$ , car si  $\varphi_E \leq \sum c_\nu \varphi_{x_\nu F}$  en tout point, et en particulier sur  $E$ ,  $\varphi_E \leq \sum c_\nu$ . On a évidemment  $(\mathfrak{S}(E_\rho) : F) \leq \sum_\rho (E_\rho : F)$ . Et l'on a, quels que soient  $E, E', E''$  :

$$(E : E') \cdot (E', E'') \geq (E : E'')$$

car les inégalités

$$\varphi_E \leq \sum c_\nu \varphi_{x_\nu E'}, \quad \varphi_{E'} \leq \sum d_\rho \varphi_{y_\rho E''}$$

entraînent

$$\varphi_E \leq \sum c_\nu d_\rho \varphi_{x_\nu y_\rho E''}.$$

On a donc, en particulier, quel que soit  $E$  :

$$\frac{1}{(E_0 : E)} \leq \frac{(E : V_\nu)}{(E_0 : V_\nu)} \leq (E : E_0)$$

Par suite  $\lambda\Omega$  est compris entre  $\frac{1}{(E_0 : \bar{\Omega})}$  et  $(\bar{\Omega} : E_0)$ , et est fini et positif.

$$\text{Si } \delta(\Omega, \Omega') > 0, \quad \lambda(\Omega + \Omega') = \lambda\Omega + \lambda\Omega'.$$

Si  $\bar{\Omega}_0 \subset \mathfrak{S}(s_i \Omega_i)$ , les  $s_i$  étant dans  $G$ , on pourra, d'après le théorème de Borel-Lebesgue, ne garder qu'un nombre fini de termes dans le second membre, et on aura alors  $\lambda\Omega_0 \leq \sum \lambda\Omega_i$ . Soit maintenant  $E$  un ensemble quelconque : considérons tous les systèmes d'ensembles  $\Omega_i$  et d'éléments  $s_i$  tels que  $E \subset \mathfrak{S}(s_i \Omega_i)$ , et soit  $xE$  la borne inférieure de  $\sum \lambda\Omega_i$  pour tous ces recouvrements.  $xE$  satisfait à l'axiome I; de plus  $x\Omega = \lambda\Omega$ , donc l'axiome II est satisfait, et  $x\bar{\Omega} \geq \lambda\Omega$ , donc  $x$  n'est pas identiquement nulle : c'est bien la mesure de Haar.

12/13

**6.**— Soit  $m$  une mesure de Haar : tout automorphisme continu de  $G$  la transforme en une mesure de Haar, c'est à dire la multiplie par un facteur constant. On aura en particulier  $m(s^{-1}Es) = m(Es) = \Delta(s) \cdot mE$  et  $\Delta(s)$  satisfait à l'équation  $\Delta(st) = \Delta(s)\Delta(t)$  : on dit que  $\Delta$  constitue une *représentation* de  $G$ . Si  $G$  est un groupe de Lie,  $\Delta(s)$  est la valeur absolue du déterminant de la substitution linéaire qui correspond à  $s$  dans le groupe adjoint. En tout cas, c'est une fonction continue de  $s$ , car si  $s$  est dans un voisinage  $V$  suffisamment petit de l'unité, on a  $E_0s \subset E_0V$ . Donc  $\Delta(s) < 1 + \varepsilon$  et par suite aussi  $\Delta(s) > \frac{1}{1 + \varepsilon}$ . Si  $\Delta(s) = 1$  quel que soit  $s$ ,  $m$  est invariante à droite :  $m(E^{-1})$ , considérée comme fonction de  $E$ , est donc une mesure de Haar, on a  $m(E^{-1}) = \lambda \cdot mE$ , d'où  $mE = \lambda^2 mE$ , et  $\lambda = 1$  : la mesure est bi-invariante. Le groupe  $G$  est alors dit *uni-modulaire*. Si au contraire  $\Delta$  n'est pas constant, l'équation  $\Delta(s) = 1$  détermine un sous-groupe invariant  $U$ , fermé dans  $G$ , et le groupe quotient  $G/U$  est isomorphe au groupe des translations de la droite. Il ne peut en être ainsi quand  $G$  est compact, ni quand c'est un groupe de Lie semi-simple : dans ces deux cas on est certain que la mesure est bi-invariante. En tout cas, on a les règles de calcul :

$$m(Es) = \Delta(s) \cdot mE, \quad d(xs) = \Delta(s) \cdot dx;$$

et  $m(E^{-1})$  considérée comme fonction de  $E$  possède l'invariance *relative* à gauche. Soit plus généralement  $\mu E$  une mesure de Radon non nulle, telle que l'on ait  $\mu(sE) = \chi(s) \cdot \mu E$  : on dira qu'elle est *relativement invariante* à gauche;  $\chi(s)$  est alors une représentation de  $G$ , et l'on voit comme pour  $\Delta(s)$  que c'est une fonction continue. On peut, au moyen de la mesure  $\mu$ , former des intégrales de Radon-Stieltjes qui seront

13/14



notées  $\int f(x) d\mu(x)$ ; et l'invariance de  $\mu$  s'exprimera symboliquement par l'égalité  $d\mu(sx) = \chi(s) \cdot d\mu(x)$ . Considérons en particulier la fonction d'ensembles de base  $\mu$

$$m_1(E) = \int_E \chi(x^{-1}) d\mu(x)$$

C'est une mesure de Radon; et l'on aura :

$$\begin{aligned} m_1(sE) &= \int_{sE} \chi(x^{-1}) d\mu(x) = \int_E \chi(x^{-1}s^{-1}) d\mu(sx) \\ &= m_1(E) \end{aligned}$$

$m_1$  est donc (à un facteur près) la mesure de Haar  $m$ ; et si l'ensemble  $E$  est contenu dans un voisinage de  $s$  dont le diamètre tend vers zéro,  $\frac{mE}{\mu E}$  tendra vers  $\chi(s^{-1})$ , donc  $\frac{\mu E}{mE}$  tendra vers  $\chi(s)$ , d'où; par définition de l'intégrale

$$\mu E = \int_E \chi(x) dx$$

Réciproquement, cette formule définit évidemment une mesure de Radon satisfaisant à l'équation  $\mu(sE) = \chi(s) \cdot \mu E$ . Cette mesure est donc unique (à un facteur près); et elle est relativement invariante à droite, car de son expression on déduit que  $\mu(sE) = \Delta(s)\chi(s)\mu E$ . On a en particulier à un facteur constant  $\lambda$  près :

$$m(E^{-1}) = \int_E \Delta(x^{-1}) dx;$$

d'où il suit que si  $E$  est contenu dans un voisinage de l'unité tendant vers zéro  $\frac{m(E^{-1})}{mE}$  tend vers  $\lambda$ ,  $\frac{mE}{m(E^{-1})}$  également, donc  $\lambda = 1$ . On peut écrire symboliquement :

$$d(x^{-1}) = \Delta(x^{-1}) dx$$

**7.-** La théorie des espaces homogènes se déduit de ces résultats (Voir Weil Mémorial à paraître prochainement<sup>[10]</sup>). Les résultats complets de la théorie sont les suivants :

*Dans tout groupe de Haar  $G$  (au sens du paragr.4) il existe un élément de volume  $dx$  et un seul tel que  $mE = \int_E dx$  soit une mesure de Radon invariante à gauche (au sens des paragr.2 et 3); et l'on a :*

$$d(sx) = dx, \quad d(xs) = \Delta(s) dx, \quad d(x^{-1}) = \Delta(x^{-1}) dx$$

*Soit  $\chi(s)$  une solution continue de  $\chi(st) = \chi(s)\chi(t)$ ; il existe une mesure de Radon  $\mu E$  et une seule telle que  $\mu(sE) = \chi(s)\mu E$ ; elle est donnée par la formule*

$$\mu E = \int_E \chi(x) dx$$

*et l'on a en même temps  $\mu(Es) = \Delta(s)\chi(s)\mu E$ .*

Soit  $g$  un sous-groupe fermé dans  $G$ ,  $d\xi$  son élément de volume invariant, tel que l'on ait  $d(\sigma\xi) = d\xi$ ,  $d(\xi\sigma) = \delta(\sigma) d\xi$ . Pour qu'il existe dans l'espace homogène  $H = G/g$  un élément de volume  $dP$  relativement invariant tel que  $d(sP) = \chi(s) dP$ , il faut et il suffit que l'on ait, sur  $g$  :  $\delta(\sigma) = \Delta(\sigma)\chi(\sigma)$ ; et  $dP$  est alors déterminé d'une manière unique par l'équation :

$$\int \chi(x)f(x) dx = \int dP \int f(x, \xi) d\xi.$$

En particulier, pour qu'il existe dans  $H$  un élément de volume invariant  $dP$ , il faut et il suffit que  $\delta(\sigma) = \Delta(\sigma)$ ; il en est ainsi nécessairement quand  $g$  est un sous-groupe invariant,  $H$  étant alors le groupe de quotient et  $dP$  la mesure de Haar dans  $H$ .

S'il s'agit de groupes de Lie, ces résultats sont faciles à vérifier.<sup>[11]</sup>

### Notes

1. André Weil avait, dès 1935, un livre en chantier sous le titre *Méthodes intégrales en théorie des groupes*. Ce livre ne devait paraître qu'en 1940, c'est [Wei40]. Cet exposé s'inscrit dans la ligne de ses travaux sur le sujet. Citons le commentaire de Weil dans ses Œuvres :

je donnais une variante de la méthode de Haar, intermédiaire entre celle-ci et celle que je devais adopter dans [1940d] [pour nous le livre [Wei40]], et qui permettait déjà de démontrer l'unicité de cette mesure et d'en établir les règles d'emploi, celles-ci résultant aisément de l'unicité. [Wei79, p. 530]

Aucune référence précise n'est donnée à la fin du texte de l'exposé, mais sont cités, pour la mesure invariante sur les groupes, les articles de Hurwitz [Hur97] et de Haar [Haa33] (qui figurent bien dans la bibliographie de [Wei40])

2. C'est dire qu'il y a un homomorphisme  $G \rightarrow \Gamma$ .
3. Ce qui veut dire dans le cas général où  $g$  n'est pas forcément invariant...
4. La plupart des notations sont reprises dans le livre [Wei40], où Weil avait renoncé à la notation  $0$ , qui n'est d'ailleurs pas utilisée dans l'exposé.
5. Après « une fonction  $f(x)$  » et « une fonction  $f(P)$  » (qui sont deux choses différentes, voici la moderne « fonction  $f$  ».
6. Définition un peu étonnante, surtout de la part de son auteur.
7. Les fonctions de Carathéodory ont été définies dans l'exposé 2-A. Ce théorème de Carathéodory, que l'on trouve dans son livre [Car18], est celui qui fit l'objet, neuf mois plus tard, de la première publication de Bourbaki [Bou35].
8. La notation  $\mathfrak{S}$  vient directement du livre de Hausdorff [Hau14]. Dans cette première édition, il notait

- la réunion de  $A$  et  $B$  par  $S = \mathfrak{S}(A, B)$  (pour *Summe*, somme),
- l'intersection de  $A$  et  $B$  par  $D = \mathfrak{D}(A, B)$  (pour *Durchschnitt*, intersection)

et donc aussi  $\mathfrak{S}_i A_i$ ,  $\mathfrak{D}_i A_i$ . À partir de l'édition suivante [Hau27], il nota  $S = A \dot{+} B$ ,  $D = AB$ . Ces notations viennent du livre de Carathéodory [Car18] et permettent une subtile distinction entre  $A \dot{+} B$  (notre  $A \cup B$ ) et  $A + B$  (réservée au cas où  $A \cap B = \emptyset$ ). Au séminaire Julia, on avait adopté  $A \cup B$  et  $A \cap B$ , mais pas encore  $\bigcup \Omega_i$ . Ce sera encore le cas l'année suivante

(voir l'exposé 3-A). C'est en faisant référence aux fascicules parus ou à paraître de Bourbaki, et notamment à [Bou40], que [Wei40] annoncera la notation  $\bigcup_i A_i$ .

9. La somme est donc, comme toujours ici (voir les notes de l'exposé 2-A), une réunion disjointe.

10. Il s'agit du livre « en chantier » mentionné dans la note 1 :

j'avais mis ce livre en chantier dès 1935, sous le titre « Méthodes intégrales en théorie des groupes », et je le destinais au *Mémorial des sciences mathématiques* où je pensais qu'il ferait une suite naturelle au célèbre fascicule d'Élie Cartan, *L'Analyse situs et la Théorie des groupes* ; c'est ainsi que mon livre est annoncé comme « devant paraître prochainement » dans mes exposés du séminaire Julia de mars et avril 1935. [Wei79, p. 530]

Quelques mois plus tard, le 22 octobre 1935, André Weil donna un exposé, dans un colloque, à Genève, sous le titre « la mesure invariante dans les espaces de groupes et les espaces homogènes », dont *l'Enseignement mathématique* ne publia qu'un résumé [Wei36], puisque le texte complet devait paraître comme un fascicule du *Mémorial des sciences mathématiques*. Ce fut, cinq ans plus tard, le livre [Wei40].

11. **Des archives de Bourbaki.** Ce jour-là, la réunion « Traité d'analyse » avait accueilli le physicien Yves Rocard, un camarade de promotion de Weil et Delsarte, qui fit part des « desiderata des physiciens ». La réunion enregistra aussi le projet de Leray (qui, cette fois, était présent), sur « les théorèmes d'existence topologique.

## Des archives du séminaire...

### Séance du 11 Mars 1935

La séance est ouverte à 16h.35. M. Julia donne la parole à Weil qui fait son exposé sur la mesure de Haar. Il commence par préciser que celle-ci est l'outil indispensable pour les études qui seront exposées dans les séances suivantes.

Après l'exposé, remarque de M. Lévy : on aurait pu définir une mesure plus symétrique par rapport aux deux multiplications, il est vrai qu'elle ne paraît pas présenter plus d'intérêt. H. Cartan fait remarquer qu'une grande partie des résultats exposés est due à Weil. M. Julia le remercie très vivement. Thé...<sup>(4)</sup>.

---

## Références

- [Bou35] N. BOURBAKI – « Sur un théorème de Carathéodory et la mesure dans les espaces topologiques », *C. R. Acad. Sci. Paris* **201** (1935), p. 1309–1311.  
 [Bou40] ———, *Éléments de mathématique. Théorie des ensembles, fascicule de résultats*, Hermann, Paris, 1940.

---

4. Une page ronéotée. Archives de l'IHP.

- [Car18] C. CARATHÉODORY – *Vorlesungen über reelle Funktionen*, Teubner, Leipzig und Berlin, 1918.
- [Haa33] A. HAAR – « Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen », *Ann. Math. (2)* **34** (1933), p. 147–169.
- [Hau14] F. HAUSDORFF – *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit & Comp, Leipzig, 1914.
- [Hau27] ———, *Mengenlehre*, de Gruyter, Leipzig, 1927.
- [Hur97] A. HURWITZ – « Ueber die Erzeugung der Invarianten durch Integration », *Gött. Nachr.* (1897), p. 71–90.
- [Wei36] A. WEIL – « La mesure invariante dans les espaces de groupes et les espaces homogènes », *Enseign. Math.* **35** (1936), p. 241.
- [Wei40] ———, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Publications de l'Institut mathématique de Clermont-Ferrand, Hermann, Paris, 1940.
- [Wei79] ———, *Œuvres scientifiques, Volume I*, Springer, 1979.