LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

2. Année 1934-1935
Espace de Hilbert

Jean Leray

La théorie de T. Carleman

Séminaire de mathématiques (1934-1935), Exposé 2-G, 13 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1934-1935__2__G_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 25 février 1935
Exposé 2-G, p. 1 à 13

LA THÉORIE DE T. CARLEMAN

par **Jean Leray**

Notations. H est l'espace[1] de Hilbert ; f et g sont des points de H
λ est une variable réelle, qui varie de $\lambda = -\infty$ à $\lambda = +\infty$
$\Delta X(\lambda)$ est la variation que subit $X(\lambda)$ quand λ parcourt l'intervalle Δ.

I.– Les opérateurs spectraux

1.– Définition d'intégrales de Stieltjes symboliques. Soit $h(\lambda)$ un point de H dépendant de λ ; soit $\alpha(\lambda)$ une fonction continue de λ ; supposons que l'intégrale de Stieltjes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d(h(\lambda), f)$$

existe et soit une fonctionnelle continue de f ; cette fonctionnelle est du type (g, f) ; nous désignerons alors par g le symbole

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, dh(\lambda)$$

Il ne faut pas voir dans cette écriture une intégrale de Stieltjes, car $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\alpha(\lambda)| \cdot \|dh(\lambda)\|$ diverge en général.

Réciproquement $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, dh(\lambda)$ représentera un point de H tel que l'identité suivante ait lieu :

$$(1) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d(h(\lambda), f) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, dh(\lambda), f\right)$$

2.– Définition des opérateurs spectraux. Un opérateur $\theta(\lambda)$ est dit spectral
1/2 quand il présente les caractères suivants :

Il opère sur H ; $\theta(-\infty)$ est nul ; $\theta(+\infty)$ est l'identité ; $\Delta\theta$ est un opérateur hermitien défini positif et borné, dont la borne est 1.

En d'autres termes :

$$\theta(-\infty)f = 0; \qquad \theta(+\infty)(f) = f \tag{2}$$

$$(f, \theta(\lambda)g) = (\theta(\lambda)f, g) \tag{3}$$

$$(f, \Delta\theta f) > 0 \tag{4}$$

$$\|\Delta\theta f\| \leqslant \|f\| \tag{5}$$

Exemple. Soit P_i un système orthogonal et complet d'opérateurs de projections ; soit λ_i un nombre réel attaché arbitrairement à chaque P_i :

$$\theta(\lambda) = \sum_{\lambda_i < \lambda} P_i$$

est un opérateur spectral.

Propriétés des opérateurs spectraux. On a (inégalité de Schwarz généralisée)

$$|(f, \Delta\theta g)| < \sqrt{(f, \Delta\theta f)\,(g, \Delta\theta g)}$$

L'inégalité de Schwarz usuelle et le fait que la fonction $(f, \theta(\lambda)f)$ croît de 0 à $\|f\|^2$ permettent d'en déduire l'inégalité

$$\text{Variation totale de } (f, \theta(\lambda)g) < \|f\| \times \|g\| \tag{6}$$

L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta(\lambda) g$$

a donc un sens quand $\alpha(\lambda)$ est bornée et continue, et cette intégrale vérifie l'inégalité :

2/3

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta g \right\| < \max|\alpha(\lambda)| \times \|g\|\,. \tag{7}$$

3.– Caractère faiblement complet de l'ensemble des opérateurs spectraux. Soit $\theta_m(\lambda)$ une suite d'opérateurs spectraux. Choisissons un ensemble dénombrable de points f_i partout denses dans H. L'inégalité (6) et le *procédé diagonal de Cantor* permettent d'extraire de la suite m une suite partielle n telle que les quantités $(f_i, \theta_n(\lambda)f_j)$ convergent quels que soient λ, i et j. L'inégalité

$$\|\theta_n(\lambda)f\| < \|f\| \qquad (f(5))^{[2]}$$

montre que dans ces conditions la suite $(f, \theta_n(\lambda)g)$ converge, quels que soient f et g. On exprime ce fait en disant que les opérateurs $\theta_n(\lambda)$ convergent faiblement vers une limite ; cette limite est un opérateur spectral $\theta(\lambda)$.

Soit g_n une suite de points de H qui convergent fortement vers une limite g (c'est à dire $\|g_n - g\| \to 0$) :

$$(f, \theta_n(\lambda) g_n) \longrightarrow (f, \theta(\lambda) g) \tag{8}$$

Soit $\alpha_n(\lambda)$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une limite $\alpha(\lambda)$; de (7) et (8) résulte que

$$\left(f, \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(\lambda)\, d\theta_n g_n\right) \longrightarrow \left(f, \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta g\right)$$

Ce paragraphe aboutit donc à la conclusion suivante : 3/4

Théorème 1. *Soit un ensemble infini d'opérateurs spectraux ; on peut en extraire une suite partielle θ_n et trouver un opérateur spectral θ qui possède les propriétés suivantes : si $\max|\alpha_n(\lambda) - \alpha(\lambda)| \to 0$, si $\|g_n - g\| \to 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n(\lambda)\, d\theta_n g_n$ converge faiblement*[(1)] *vers $\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta g$.*

II.– Les opérateurs de Carleman

4.– Champ d'existence et champ des valeurs. Nous envisageons un ensemble E de fonctionnelles linéaires L présentant les caractères que voici[3] :

1) Le champ de définition de chacune d'elles est une portion ou la totalité de H. la valeur de L au point f de H sera désignée par (f, L) ou par $\overline{(L, f)}$.
2) On ne peut avoir $f \neq 0$ et $(f, L) = 0$ quel que soit L.
3) Si f_n converge faiblement vers f, si les quantités (f_n, L) existent, si elles tendent vers une limite quel que soit L, alors (f, L) existe et est égal à cette limite.

Monsieur Carleman[4] envisage un opérateur K qui associe à chaque élément L de 4/5
E un point, KL, de H.

Quand, étant donné un point f de H, il existe un point g de H, tel que

$$(g, L) = (f, KL)$$

quel que soit L, alors on écrit

$$g = Kf$$

1. La convergence faible des points de H a été définie par A. Weil dans son premier exposé (B).

5.– Caractère hermitien des opérateurs de Carleman. M. Carleman suppose que E contient un sous-ensemble e jouissant des propriétés suivantes :

1) e se compose d'une infinité dénombrable de fonctionnelles $L : L_1, L_2, \dots, L_\alpha, \dots$
2) Chaque L_α est un point de H ; les combinaisons linéaires finies des L_α sont partout denses dans H.
3) Kf existe chaque fois qu'on peut trouver un point g de K tel que
$$(f, KL_\alpha) = (g, L_\alpha) \qquad \text{quel que soit } \alpha.$$
4) Si L est un point de H, alors $(L_\alpha, KL) = (KL_\alpha, L)$; en particulier le tableau des quantités (L_α, KL_β) est hermitien.

6.– Exemple 1. H est l'ensemble des fonctions de carrés sommables $f(x)$ $(0 < x < 1)$; K est un noyau symétrique réel, $K(x,y)$; $K(x)^2 = \displaystyle\int_0^1 K(x,y)^2\,dy$ existe
5/6 et est continu, sauf sur un ensemble fermé de mesure nulle F. Les fonctionnelles L appartiennent à deux types : celles du premier type sont caractérisées chacune par un point a, étranger à F, de l'intervalle $(0,1)$; $(f, L) = f(a)$; $KL = K(x,a)$.

Les L du second type sont les fonctions réelles $\ell(x)$ qui appartiennent à H et pour lesquelles $\displaystyle\int_0^1 K(x)\,|\ell(x)|\,dx$ est fini ; $KL = \displaystyle\int_0^1 K(x,y)\ell(y)\,dy$.

La définition de e est aisée et très arbitraire.[5]

Signalons que Kf existe et vaut
$$\int_0^1 K(x,y) f(y)\,dy$$
chaque fois que cette intégrale est un élément de H.

Exemple 2. H est l'ensemble des fonctions $f(x)$ de carrés sommables $(-\infty < x < +\infty)$; K est un noyau symétrique réel, $K(x,y)$; on ne suppose rien sur $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)^2\,dy$; mais on suppose que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} [K(x,y) - K(x',y)]^2\,dy$$
est une fonction continue de x et x'.

On introduit d'abord des L caractérisés chacun par un couple de nombres (a,b) ; on pose
$$(f, L) = f(a) - f(b), \qquad KL = K(x,a) - K(x,b).$$

On introduit ensuite des L qui sont les moyennes des L précédents sur des intervalles
6/7 bornés décrits par a et b.

La définition de e est aisée et très arbitraire.

Signalons que Kf existe, et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [K(x,y) - K(0,y)] f(y)\, dy + \ \mathrm{C^{te}}$$

chaque fois que cette expression est un élément de H moyennant un choix convenable de la constante.

N.B. Les fonctions de Green des domaines non bornés constituent des opérateurs de Carleman analogues au précédent.

III.– Opérateurs spectraux attachés à un opérateur de Carleman

7.– Définitions. Un *opérateur spectral* $\theta(\lambda)$ est attaché à l'opérateur de Carleman K quand il vérifie la relation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d\theta(\lambda) g = K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta(\lambda) g \tag{9}$$

quel que soit g, chaque fois que $\alpha(\lambda)$ et $\lambda\alpha(\lambda)$ sont bornés et continus.

On nomme *solution différentielle* attachée à K tout point $h(\lambda)$ de H qui vérifie l'équation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, dh(\lambda) = K \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, dh(\lambda) \tag{10}$$

chaque fois que $\alpha(\lambda)$ et $\lambda\alpha(\lambda)$ sont bornés et continus.

L'opérateur spectral $\theta(\lambda)$ correspond donc à K quand $\theta(\lambda)g$ en est solution différentielle, quel que soit g. 7/8

8.– Théorème de continuité. Soit un opérateur K, défini sur un champ E. Soit une suite d'opérateurs K_m, définis sur E, tels que $\|K_m L - KL\| \to 0$ quelque soit L.

Supposons qu'à chaque K_m soit attaché un opérateur spectral θ_m.

Soit θ_n une suite faiblement convergente extraite de la suite θ_m (cf. théorème 1). Je dis que sa limite θ constitue un opérateur spectral attaché à K.

Soit une fonction $\alpha(\lambda)$ bornée et continue ainsi que $\lambda\alpha(\lambda)$. D'un côté $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d\theta_n g$ converge faiblement vers $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d\theta g$. D'un autre côté

$$\begin{aligned}
\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d\theta_n g, L\right) &= \left(K_n \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta_n g, L\right)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d(\theta_n g, K_n L)\\
&\longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d(\theta g, KL) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta g, LK\right)
\end{aligned}$$

8/9 Donc $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d\theta g, L\right)$ existe et vaut $\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta g, LK\right)$; la relation (9) a donc bien lieu.

9.– Théorème d'existence. Supposons d'abord que K soit un opérateur *dégénéré*, c'est à dire du type $KL = \sum a_{ij}\varphi_i(L, \varphi_j)$ $(i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots, m)$. a_{ij} est une matrice hermitienne ; φ_i est un point de H ; $L\varphi_i$ existe.

D'après la théorie des matrices hermitiennes finies, on peut trouver une substitution qui orthogonalise et norme les φ_i et qui réduise a_{ij} à une forme diagonale ; il vient

$$KL = \sum_1^m \lambda_i \varphi_i(L, \varphi_i)$$

(les λ_i sont des constantes réelles). Or un tel opérateur possède évidemment l'opérateur spectral suivant :

$$\theta(\lambda) f = \sum_{\lambda_i < \lambda} \varphi_i(f, \varphi_i) \qquad \text{pour } \lambda < \lambda_i$$

$$f - \theta(\lambda) f = \sum_{\lambda < \lambda_i} \varphi_i(f, \varphi) \qquad \text{pour } \lambda > 0$$

Soit K un opérateur non dégénéré, tel que E se confonde avec e. Au moyen de
9/10 substitutions linéaires finies effectuées sur les L_α nous pouvons nous ramener au cas où $(L_\alpha, KL_\beta) = 0$ pour $\alpha \neq \beta$. (L_α, KL_α), qui est réel, n'est nul que si $KL_\alpha = 0$. Considérons la suite des opérateurs dégénérés

$$K_m L = \sum_{\alpha=1}^m \frac{(L, KL_\alpha) \cdot KL_\alpha}{L_\alpha, KL_\alpha)}$$

(on pose $\dfrac{0 \times 0}{0} = 0$).

Ils possèdent des opérateurs spectraux ; $K_m L_\alpha = KL_\alpha$ pour $m \geqslant \alpha$. Donc, d'après le théorème de continuité, K possède un opérateur spectral au moins.

Or les opérateurs spectraux de K ne changent pas quand on modifie E sans altérer e. Par suite, tout opérateur de Carleman *possède au moins un opérateur spectral.*

10.– Propriétés des opérateurs spectraux attachés à un opérateur de Carleman. Les hypothèses faites sur le champ E et la relation de définition (9) ont les conséquences suivantes :

$(\Delta\theta g, L)$ existe, si 0 est étranger à l'intervalle Δ.

La relation $(\Delta\theta g, L) = (g, \Delta\theta L)$ définit un point de H, $\Delta\theta L$, qui est une fonction
10/11 additive de Δ (0 étranger à Δ). On a, si α et $\lambda\alpha$ sont bornés et continus,

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta g, KL\right) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d\theta g, L\right)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d(\theta g, L) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d(g, \theta L)$$

Un passage à la limite permet d'en déduire que :

$$(g, KL) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(\theta g, L). \tag{11}$$

On a, si α et $\lambda\alpha$ sont bornés et continus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d\theta L = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d\theta KL$$

Par suite, L et M étant deux éléments de E, $(\Delta\theta L, M)$ existe si 0 est étranger à Δ.

On a, si α et $\lambda^2\alpha$ sont bornés et continus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2\alpha(\lambda)\, d(\theta L, M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\alpha(\lambda)\, d(\theta KL, M)$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d(\theta KL, KM).$$

D'où

$$(KL, KM) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2\, d(\theta L, M). \tag{12}$$

Enfin, on a le droit d'écrire : 11/12

$$(KL, M) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d(\theta L, M) \tag{13}$$

chaque fois que toutes les intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\lambda|\ d(L, \theta L)$ convergent.

Ces convergences sont assurées, *par exemple*, quand $\theta(\lambda) = 0$ pour $\lambda < 0$, et qu'à chaque élément L de E on peut associer une suite de points ℓ_n de H possèdant les propriétés que voici : les ℓ_n sont les éléments de E ; $\|K\ell_n - KL\| \to 0$; l'ensemble des quantités $(\ell_n, K\ell_n)$ est borné.

IV.– Classification des opérateurs de Carleman et des opérateurs spectraux

11.– Définition des classes. Considérons la transformation

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu}\, d\theta g. \tag{14}$$

Si[6] $\Im(\mu) \cdot \Im(\nu) > 0$, et si $g \neq 0$, alors $f \neq 0$; en effet

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu}\, d(\theta g, g) \neq 0,$$

car $(\theta g, g)$ croît et l'argument de $\dfrac{\lambda - \nu}{\lambda - \mu}$ a une oscillation inférieure à π.

De (9) résulte d'autre part que :

$$K(f - g) = \mu f - \nu g.$$

12/13 Les solutions linéairement indépendantes de l'équation $Kf - \mu f = 0$ sont donc transformées par (14) en solutions linéairement indépendantes de l'équation $Kg - \nu g = 0$, si $\Im(\mu) \cdot \Im(\nu) > 0$.

Il en résulte que l'équation $Kf - \mu f = 0$ a le même nombre de solutions de chaque côté de l'axe des μ réels.

K est dit appartenir à la *classe* (p, n) quand ce nombre est p pour $\Im(\mu) > 0$, n pour $\Im(\mu) < 0$.

θ est dit appartenir à la *classe* (p, n) quand il est opérateur spectral d'un opérateur K de cette classe.[7]

Signalons deux théorèmes faciles : $n = p$ quand il existe un intervalle de l'axe des λ où $\theta(\lambda)$ est constant. K est de classe $(0, 0)$ si l'axe des λ contient un intervalle où toutes les solutions de $Kf - \lambda f = 0$ et toutes les solutions différentielles de K sont nulles.

N.B. M. Carleman avait nommé[8] classe I la classe $(0, 0)$. M. von Neumann dénomme hypermaximale la classe $(0, 0)$ et maximales les classes $(p, 0)$, $(0, n)$.

12.– Une résolvante de l'équation.

(15) $\qquad Rf - \mu f = g \qquad$ (μ, nombre complexe donné, g donné; f inconnu)

La relation (9) montre que cette équation admet la résolvante

$$f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\theta g}{\lambda - \mu} \tag{16}$$

13/14

Unicité de l'opérateur spectral attaché à un opérateur K de classe $(0, 0)$, $(p, 0)$ ou $(0, n)$. Supposons K de classe $(0, n)$. Choisissons $\Im(\mu) > 0$; la solution de (15) est unique ; nous la désignerons par $f(\mu)$. Nous avons d'après (16)

$$(f(\mu), g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(\theta g, g)}{\lambda - \mu}$$

d'où, en utilisant des formules classiques de la théorie du potentiel,

$$-i\varepsilon(f(\lambda + i\varepsilon), g) \longrightarrow (\theta(\lambda + 0)g, g) - (\theta(\lambda - 0)g, g)$$

$$\frac{2}{\pi}\, \Im \int_0^{\lambda} (f(\lambda' + i\varepsilon), g)\, d\lambda' \longrightarrow (\theta(\lambda + 0)g, g) + (\theta(\lambda - 0)g, g) \qquad (\varepsilon > 0, \quad \varepsilon \longrightarrow 0)$$

Ces formules prouvent que θ est unique ; elles donnent même *un moyen de connaître* θ quand on connaît explicitement la solution générale de (15) pour $\Im(\mu) > 0$.

Relations d'orthogonalité des opérateurs spectraux de classes $(0,0)$, $(p,0)$ *et* $(0,n)$. Supposons K de classe $(0,n)$. Nous avons d'après (9)

$$(K-\mu)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta(\lambda)\,d\theta f}{\lambda-\mu}=\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(\lambda)\,d\theta f \qquad (\beta \text{ borné et continu}).$$

Supposons $\Im(\mu) > 0$; la résolvante (16) nous permet de donner à cette relation la forme : 14/15

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\theta}{\lambda-\mu}\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(\lambda)\,d\theta f=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\beta(\lambda)}{\lambda-\mu}\,d\theta f$$

Donc plus généralement

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(\lambda)\,d\theta\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\beta(\lambda)\,d\theta f=\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(\lambda)\beta(\lambda)\,d\theta f \tag{17}$$

si $\alpha(\lambda)$ est borné, continu, *analytique* pour $\Im(\lambda) < 0$ et si $\beta(\lambda)$ est borné, continu.

En intervertissant l'ordre des opérateurs, on constate que (17) vaut encore si $\alpha(\lambda)$ est borné, continu et si $\beta(\lambda)$ est borné, continu, *analytique* pour $\Im(\lambda) > 0$.

Si K appartient à la classe $(0,0)$ la conclusion est que (17) vaut quels que soient α et β, bornés et continus.

13.– Les opérateurs spectraux de classe $(0,0)$**.** ont été étudiés très complètement par M. Carleman (chap.III)

M. Carleman donne, entre autres, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur K soit de classe $(0,0)$: on doit avoir $(Kf,g) = (f,Kg)$ chaque fois que Kf et KG existent.

M. Carleman généralise à ces opérateurs la théorie de Hellinger (exposée par Blanc (E)) : les solutions différentielles vérifient des relations d'orthogonalité ; θ peut s'obtenir comme combinaison bilinéaire de solutions différentielles. 15/16

14.– Préliminaires concernant les opérateurs spectraux de classe $(0,n)$**.** Soit φ une solution de l'équation $R\varphi-\nu\varphi=0$ telle que $2\pi(\overline{\nu}-\nu)(\varphi,\varphi)=1$. Si $\Im(\mu)>0$, $Rf-\mu f=0$ entraîne $f=0$; on a donc, d'après le parg.14

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\lambda-\nu}{\lambda-\mu}\,d\theta\varphi=0 \qquad \text{c'est à dire } \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\lambda-\mu}\,d\theta\varphi=\frac{1}{\nu-\varphi};$$

par suite, on aura plus généralement

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\alpha(\lambda)\,d\theta\varphi=\alpha(\nu)\cdot\varphi, \tag{18}$$

si $\alpha(\lambda)$ est borné, continu, analytique pour $\Im(\mu) < 0$. En particulier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \alpha(\lambda)\, d(\theta\varphi,\varphi) = \alpha(\nu)(\varphi,\varphi) \text{ si } \alpha(\lambda) \text{ est borné, continu, analytique pour } \Im(\mu) < 0$$
$$= \alpha(\overline{\nu})(\varphi,\varphi) \text{ si } \alpha(\lambda) \text{ est borné, continu, analytique pour } \Im(\mu) > 0.$$

Ceci prouve que

$$(\theta\varphi,\varphi) = \frac{(\varphi,\varphi)}{2i\pi} \log \frac{\lambda-\overline{\nu}}{\lambda-\nu} \tag{19}$$

(17), (18) et (19) permettent de vérifier aisément l'affirmation suivante :

16/17 Associons à un point f de H du type $f = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(\lambda)\, d\theta\varphi$ (β borné, continu) la fonction, analytique pour $\Im(\mu) > 0$,

$$F(\mu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda-\overline{\nu}}{\lambda-\nu}\, d(\theta f,\varphi);$$

on a :

$$(f_1, f_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_1(\lambda)\overline{F_2(\lambda)}\, d\lambda. \tag{20}$$

Un opérateur spectral particulier de classe $(0,1)$. Soit un opérateur K de classe $(0,1)$ tel que les points $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \beta(\lambda)\, d\theta\varphi$ soient partout dense[s] dans H. D'après (20), E est identique à l'espace des fonctions $F(\mu)$, analytiques pour $\Im(\mu) > 0$ et telles que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |F(\lambda)|^2\, d\lambda$ converge. $\theta(\lambda)f$ correspond à $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(\lambda')\, d\lambda'}{\lambda'-\mu}$, Rf correspond à $\lambda F(\lambda)$, quand f est un élément de E ; sinon Rf existe et correspond à $\lambda F(\lambda) +$ C[te] chaque fois que cette fonction appartient à H, moyennant un choix convenable de la constante.

15.– Les opérateurs spectraux de classe $(0,n)$**.** M. von Neumann, grâce à sa transformation de Cayley, prouve qu'un opérateur K de classe $(0,n)$ a la structure suivante : on peut envisager H comme étant le produit de $n+1$ espaces orthogonaux ; dans le premier (qui peut ne pas exister) K est un opérateur de classe $(0,0)$, dans
17/18 chacun des n autres K est cet opérateur particulier de classe $(0,1)$ que nous venons de décrire.

N.B. M. von Neumann définit sa transformation de Cayley sans avoir recours à aucun opérateur spectral (C)).

Dans le cas des classes $(0,n)$, $(0,0)$, $(p,0)$ cette transformation de Cayley appartient au type (14).

16.– Opérateurs de K **de classe** (p,n)**.** La transformation de Cayley permet à M. von Neumann d'adjoindre à e des éléments ℓ de H qui modifient la définition de K en diminuant p et n d'un même nombre. D'où le théorème suivant :

Un noyau K de classe (p, n) possède une infinité d'opérateurs spectraux de classe $(p-n, 0)$ si $p > n$, de classe $(0, n-p)$ si $p < n$; un opérateur K de classe (∞, ∞) possède une infinité d'opérateurs de chacune des classes $(0, n)$, $(0, 0)$, $(p, 0)$.

Je ne connais aucun renseignement sur les opérateurs spectraux qui appartiennent aux classes (n, p), $np \neq 0$.

Bibliographie.

T. Carleman, Sur les Equations intégrales singulières à noyau réel et symétrique – Uppsala 1923 Lundequitshe Bokhandeln.

V. Neumann, Math. Ann. T.102 – 1930.

Le livre de M. Carleman se compose de la théorie générale ci-dessus (parg.1 à 13) et d'applications importantes de cette théorie.

La partie originale du mémoire de M. von Neumann se compose de quelques pages où il introduit la transformation de Cayley et où il étudie, grâce à cette transformation, les L appartenant à H ; ces passages sont indépendants de toute considération d'opérateur spectral. L'étude des opérateurs spectraux que fait M. von Neumann est détournée et incomplète.[9]

Notes

1. Dans cet exposé, il est question des travaux de Torsten Carleman (sur les équations intégrales singulières à noyau symétrique, comme l'indiquait le programme reproduit page 71), c'est-à-dire du contenu de son livre [Car23] de 1923. L'article [vN29] est aussi utilisé et cité dans la bibliographie à la fin de l'exposé.
2. Il s'agit sans doute d'un « cf (5) » mal interprété par la personne qui frappa le texte.
3. Comme son titre l'indique, le livre de Carleman est écrit en termes de noyaux plutôt que d'opérateurs.
4. La personnalisation de ce « Monsieur Carleman » (Leray n'écrit ni « Monsieur Hilbert » ni « Monsieur Hellinger »), indique sans doute que Leray l'avait rencontré. Carleman venait très souvent à Paris (voir [Car50, Jul49]), et y avait été assez longuement en 1929–30. Ajoutons que Carleman était un ami de Gaston Julia.
5. C'est-à-dire que n'importe quelle base hilbertienne convient.
6. $\mathfrak{I}$ désigne la partie imaginaire.
7. Les entiers p et n sont appelés *Defektindizes* par von Neumann [vN29, p. 87].
8. Dans son livre [Car23, p. 62], il écrivit :

> Le noyau $K(x, y)$ est de la classe I si l'équation
> $$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)\, dy$$
> n'a aucune solution non nulle de carré intégrable pour $\lambda \notin \mathbf{R}$

9. **Des archives de Bourbaki.** Les commentaires de Leray sur la bibliographie sont entiers et directs. Quelques semaines plus tard, au cours de la réunion du 6 mai 1935 du « Traité d'analyse », il exposa son programme pour la partie « équations intégrales » de ce traité,

en distinguant deux parties, la théorie des intégrales non symétriques et (document `delta_010.pdf`, archives Bourbaki).

> 2) La théorie des équations intégrales symétriques comme cas particulier de la théorie des opérateurs hermitiques dans l'espace de Hilbert.
>
> Leray pense qu'il est inutile de parler de la méthode de Fredholm. Delsarte fait toutes ces réserves sur cette opinion. Il faut en tout cas parler de l'opérateur résolvant et développer ses propriétés formelles. Chevalley est aussi de cet avis.
>
> Leray pense, au sujet du 2$^{\text{è}}$, à exposer les travaux de Carleman qui ont le maximum de généralité à l'heure actuelle. Leray parle même de faire cet exposé en un nombre de pages très réduit. Delsarte souhaite vivement que cela soit possible. Il faut remarquer qu'en tout cas il faudra entrer dans le détail en ce qui concerne les opérateurs non bornés. C'est déjà là, à son sens, un très gros morceau.
>
> Quoi qu'il en soit, le plan de Leray s'impose et est admis sans discussion.

Mais, ce 25 février, la cinquième réunion du traité d'analyse se tint en présence, seulement, de Weil, Delsarte, Cartan, de Possel et Chevalley. On y discuta des équations différentielles. Après la réunion, dit le compte rendu `delta_005.pdf`, Leray fit une proposition de plan d'exposition des théorèmes classiques d'existence. Probablement dans la discussion (ou au thé ?) qui suivit son exposé.

Des archives du séminaire...

Compte-rendu des séances du 25 Février 1935

À 16h.40, M.Julia donne la parole à Leray pour son exposé du mémoire de Carleman. Celui-ci prévient qu'il a adopté les notations et méthodes des exposés précédents, et non celles du mémoire ce qui l'a obligé à généraliser et transformer la plupart des résultats et démonstrations.

Il fait cet exposé de 16h.45 à 18h, puis en donne une courte application qui se trouve dans le mémoire de Carleman. Pendant cet intervalle s'engage une discussion dans laquelle on essaie de comparer les travaux de Carleman et Von Neumann.

La discussion se poursuit après 18h.15 pendant le thé. La séance est levée à 18h.30 (2).

---

2. Une page ronéotée. Archives de l'IHP.

Références

[Car23] T. Carleman – *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique*, Lundequistska Bokhandeln, Uppsala, 1923.

[Car50] F. Carlsson – « Torsten Carleman », *Acta mathematica* **82** (1950), p. I–III.

[Jul49] G. Julia – « Notice nécrologique sur Torsten Carleman, correspondant pour la section de géométrie », *C. R. Acad. Sci. Paris* **228** (1949), p. 445–447.

[vN29] J. von Neumann – « Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren », *Math. Ann.* **102** (1929), p. 49–131.