

# LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par  
Michèle Audin

## 2. Année 1934-1935 *Espace de Hilbert*

Jean Delsarte

**L'axiomatique des opérateurs linéaires dans l'espace de Hilbert; les opérateurs bornés**

*Séminaire de mathématiques* (1934-1935), Exposé 2-C, 15 p.

<[http://books.cedram.org/MALSM/SMA\\_1934-1935\\_\\_2\\_\\_C\\_0.pdf](http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1934-1935__2__C_0.pdf)>



Cet article est mis à disposition selon les termes de la licence  
CREATIVE COMMONS ATTRIBUTION – PAS DE MODIFICATION 3.0 FRANCE.  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nd/3.0/fr/>

**cedram**

*Exposé mis en ligne dans le cadre du*  
*Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques*  
<http://www.cedram.org/>

## L'AXIOMATIQUE DES OPÉRATEURS LINÉAIRES DANS L'ESPACE DE HILBERT ; LES OPÉRATEURS BORNÉS

par Jean Delsarte

### Plan de l'exposé.

- a) Définition et propriétés générales des opérateurs de linéaires dans l'espace de Hilbert.<sup>[1][2]</sup>
- b) Les opérateurs de projection.
- c) Les opérateurs continus – Le théorème de Hellinger-Toeplitz – Les suites convergentes d'opérateurs.
- d) L'opérateur résolvant – le spectre.

**a. – Définition et propriétés générales des opérateurs de linéaires dans l'espace de Hilbert.** On désigne sous le nom d'opérateur dans l'espace de Hilbert toute transformation ponctuelle  $g = Rf$  faisant correspondre à un élément  $f$  de l'espace un autre élément  $g$ . La transformation est supposée unique<sup>[3]</sup> dans le sens  $f \rightarrow g$ .

En général, l'opérateur n'est défini que lorsque l'élément initial  $f$  décrit un certain domaine qui est le *domaine d'existence* de l'opérateur ; l'élément final décrit alors un autre domaine, qui est le *domaine des valeurs* de l'opérateur.

$R$  et  $S$  étant deux opérateurs,  $a$  un nombre quelconque,  $m$  un entier positif, les opérations  $R+S$ ,  $R-S$ ,  $aR$ ,  $RS$ ,  $R^m$  s'entendent d'elles-mêmes ; il va sans dire que des restrictions convenables doivent être faites en ce qui concerne les domaines d'existence des opérateurs représentés par ces symboles ; par exemple, le domaine d'existence de  $R + S$  est le domaine d'existence de  $R$  et de  $S$ , le domaine d'existence de  $RS$  est la 1/2  
partie commune au domaine des valeurs de  $R$  et au domaine d'existence de  $S$ .

Si la liaison établie par l'opérateur  $R$  entre l'élément initial et l'élément final est biunivoque, l'opérateur  $R$  possède un inverse qu'on désigne par  $R^{-1}$  ; si  $E$  désigne l'opérateur identique, il est clair que l'on a

$$R \cdot R^{-1} = R^{-1} \cdot R = E$$

Si  $R$  et  $S$  ont des inverses, on voit que  $aR$ ,  $RS$  ont aussi des inverses qui sont

$$(aR)^{-1} = \frac{1}{a}R^{-1} \quad (RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}.$$

**Définition 1.** Un opérateur  $A$  est linéaire si son domaine de définition est une variété linéaire, et si, quels que soient les éléments  $f_1, f_2, \dots, f_k$ , de ce domaine, et quels que soient les nombres  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , on a

$$A[a_1 f_1 + a_2 f_2 + \dots + a_k f_k] = a_1 A f_1 + a_2 A f_2 + \dots + a_k A f_k.$$

Nous ne considérerons dans la suite que les opérateurs linéaires dont les domaines de définition sont partout denses dans l'espace de Hilbert.

**Définition 2.** En présupposant son existence, on appelle opérateur associé à un opérateur linéaire donné  $A$ , et on désigne<sup>[4]</sup> par  $A^\times$ , un opérateur linéaire ayant même domaine de définition que  $A$ , et tel, de plus, que l'on ait, quels que soient les éléments  $f$  et  $g$  de ce domaine de définition

$$(f, Ag) = (A^\times f, g) \quad (f, A^\times g) = (Af, g)$$

On remarquera que la seconde condition équivaut à la première, comme on le voit en échangeant  $f$  et  $g$ , et en prenant les imaginaires conjugués des deux membres. Il en résulte que l'opérateur associé à  $A^\times$  est  $A$  lui-même.

On voit aisément, toujours en supposant leur existence, que les opérateurs associés à  $A + B$ ,  $A - B$ ,  $aA$ ,  $AB$  sont

$$(A+B)^\times = A^\times + B^\times \quad (A-B)^\times = A^\times - B^\times \quad (aA)^\times = \bar{a}A^\times \quad (AB)^\times = B^\times A^\times$$

De la même manière, si  $A$  a un inverse  $A^{-1}$  et un associé  $A^\times$ , si ce dernier opérateur a aussi un inverse  $A^{\times -1}$ ,  $A^{-1}$  et  $A^{\times -1}$  sont associés; on a en effet

$$(A^{-1}f, g) = (A^{-1}f, A^\times A^{\times -1}g) = (AA^{-1}f, A^{\times -1}g) = (f, A^{\times -1}g)$$

*Remarque.* En réalité, dans un espace vectoriel normé général (espace de S.Banach) l'opérateur linéaire associé à un opérateur linéaire donné est défini dans l'espace dual; ce n'est que parce que l'espace de Hilbert est identique à son espace dual, que la définition précédente a un sens. Cette remarque a son prix, car il en résulte que le concept d'opérateur hermitien n'a de signification que dans l'espace de Hilbert.

**Définition 3.** Un opérateur linéaire est hermitien si il est identique à son associé.

**Définition 4.** Un opérateur linéaire  $U$  est dit unitaire, lorsque l'on a

$$UU^\times = U^\times U = E$$

Il en résulte

$$(Uf, Ug) = (U^\times Uf, g) = (f, g) \quad \|Uf\| = \|f\|$$

Les opérateurs unitaires invarient donc les normes et les produits scalaires des éléments auxquels on les applique.

**Théorème 1.** Si un opérateur linéaire partout défini invarie la norme, il est unitaire.

Supposons en effet que l'on ait

$$(Uf, Uf) = (f, f)$$

changeant  $f$  en  $f + g$ , puis en  $f - g$  et soustrayant, on trouve

$$\operatorname{Re}(Uf, Ug) = \operatorname{Re}(f, g)$$

changeant ensuite  $f$  en  $if$ , on obtient

$$\operatorname{Im}(Uf, Ug) = \operatorname{Im}(f, g)$$

finalement

$$(Uf, Ug) = (f, g)$$

quels que soient les éléments  $f$  et  $g$ ; donc  $U \cdot U^\times = E$  et  $U$  est unitaire.

**Définition 5.** Un opérateur linéaire  $A$  est continu si, à tout nombre  $\varepsilon$  positif correspond un nombre positif  $\eta$  tel que  $\|f - g\| \leq \eta$  entraîne  $\|Af - Ag\| \leq \varepsilon$  et cela, aussi petit que soit  $\varepsilon$ .<sup>[5]</sup>

**Théorème 6.** Un opérateur<sup>[6]</sup> partout défini qui est continu à l'origine est un opérateur continu.

Cela résulte immédiatement de la linéarité de l'opérateur car

$$A(f - g) = Af - Ag$$

**Définition 6.** Un opérateur linéaire  $A$  partout défini est dit borné s'il existe un nombre positif  $M$  tel que l'on ait, quels que soient les éléments  $f$  et  $g$  de l'espace

$$\|Af - Ag\| \leq M \|f - g\|$$

4/5

**Théorème 3.** La condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur soit continu est qu'il soit borné.

Il est d'abord bien clair que tout opérateur borné est continu.

Inversement, supposons l'opérateur  $A$  continu, et soit  $\delta$  la valeur de  $\eta$  correspondant à  $\varepsilon = 1$ ; alors si  $f$  est de norme inférieure à  $\delta$ , on a  $\|Af\| \leq 1$ . Posons encore  $M = \frac{2}{\delta}$ ; l'inégalité

$$\|Af\| \leq M \|f\|$$

est vérifiée pour  $f$  nul; soit, dans le cas contraire,

$$g = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|f\|} f \quad \|g\| = \frac{1}{2}\delta \quad \text{et} \quad Ag = \frac{\frac{1}{2}\delta}{\|f\|} Af$$

mais  $\|Ag\|$  est inférieur à l'unité puisque  $\|g\|$  est inférieur à  $\delta$ , on a donc bien

$$\|Af\| \leq M \|f\|.$$

Borne d'une fonctionnelle bilinéaire. De  $\|Af\| \leq M \|f\|$  résulte

$$|(Af, g)| \leq \|Af\| \cdot \|g\| \leq M \|f\| \cdot \|g\|$$

Inversement, si  $|(Af, g)| \leq M \|f\| \cdot \|g\|$ , on voit, en changeant  $g$  en  $Af$ , que

$$\|Af\| \leq M \|f\|$$

**b. – Les opérateurs de projection.** Leur étude est importante car ils constituent les éléments simples en lesquels se décomposent naturellement les opérateurs hermitiens.

5/6

**Définition 7.** Soit  $\mathfrak{M}$  une multiplicité linéaire fermée. On a vu (exposé B) que tout élément  $f$  de l'espace se décompose d'une manière unique  $f = g + h$  en un élément  $g$  contenu dans  $\mathfrak{M}$  et en un élément  $h$  orthogonal à  $\mathfrak{M}$ . L'opération faisant passer de  $f$  à  $g$  sera considérée maintenant comme l'application à  $f$  d'un opérateur de projection

$$g = P_{\mathfrak{M}}f$$

Le domaine de définition de cet opérateur est l'espace tout entier, son domaine des valeurs est la multiplicité  $\mathfrak{M}$ .

**Théorème 4.** Les opérateurs de projection sont des opérateurs linéaires.

Soient en effet  $f$  et  $g$  deux éléments de l'espace, on a

$$f = P_{\mathfrak{M}}f + h \quad g = P_{\mathfrak{M}}g + k$$

$h$  et  $k$  sont orthogonaux à la multiplicité  $\mathfrak{M}$ , ainsi que  $h + k$  et on peut écrire

$$f + g = P_{\mathfrak{M}}f + P_{\mathfrak{M}}g + h + k$$

comme de plus  $P_{\mathfrak{M}}f + P_{\mathfrak{M}}g$  appartient à la multiplicité  $\mathfrak{M}$  on voit qu'on a nécessairement

$$P_{\mathfrak{M}}f + P_{\mathfrak{M}}g = P_{\mathfrak{M}}(f + g)$$

**Théorème 5.** Les opérateurs de projection sont hermitiens.

Il suffit de remarquer que

$$\begin{aligned} (P_{\mathfrak{M}}f, g) &= (P_{\mathfrak{M}}f, P_{\mathfrak{M}}g + h) = (P_{\mathfrak{M}}f, P_{\mathfrak{M}}g) = (P_{\mathfrak{M}}f + h, P_{\mathfrak{M}}g) \\ &= (f, P_{\mathfrak{M}}g) \end{aligned}$$

puisque  $h$  et  $k$  sont orthogonaux à la multiplicité  $\mathfrak{M}$ .

6/7 **Théorème 6.** Un opérateur de projection est identique à son carré.

C'est un point évident.

**Théorème 7.** Tout opérateur hermitien partout défini, qui est identique à son carré, est un opérateur de projection.

Soit  $A$  un tel opérateur. Soit  $\mathfrak{M}$  la multiplicité linéaire fermée qui contient les  $Af$ ; on a

$$(Af, g - Ag) = (Af, g) - (Af, Ag) = (Af, g) - (A^2f, g) = (Af, g) - (Af, g) = 0$$

Tous les  $g - Ag$  sont donc orthogonaux aux  $Af$ , les éléments de l'espace orthogonal aux  $g - Ag$  forment une multiplicité linéaire fermée qui se confond avec  $\mathfrak{M}$ , et les éléments  $g - Ag$  appartiennent à la multiplicité linéaire fermée complètement orthogonale à  $\mathfrak{M}$ ; mais une décomposition de  $g$  sur ces deux multiplicités est

$$g = (g - Ag) + Ag$$

comme une telle décomposition est unique, on a

$$A = P_{\mathfrak{M}}$$

**Théorème 8.** Soient  $A = P_{\mathfrak{M}}$ ,  $B = P_{\mathfrak{N}}$ , deux opérateurs de projection; pour que  $A + B$  soit un opérateur de projection, il est nécessaire et suffisant que  $AB = BA = 0$ ; les multiplicités  $\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont alors complètement orthogonales.

Appliquons le théorème 7 :  $A + B$  est évidemment partout défini et hermitien, il suffira d'écrire que

$$(A + B)^2 = A^2 + B^2 + AB + BA = A + B + AB + BA = A + B$$

Il est donc nécessaire et suffisant que  $AB + BA$  soit nul, mais alors il vient

$$A(AB + BA) = AB + ABA = 0 \quad A(AB + BA)A = 2ABA = 0$$

$ABA$  est donc nul ainsi que  $AB$  et  $BA$ . Il vient ensuite, quels que soient les éléments  $f$  et  $g$  7/8

$$(ABf, g) = (Bf, Ag) = 0$$

$\mathfrak{M}$  et  $\mathfrak{N}$  sont donc bien complètement orthogonales. Désignons par  $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$  la multiplicité linéaire dont chaque élément est la somme d'un élément  $f$  de  $\mathfrak{M}$  et d'un élément  $g$  de  $\mathfrak{N}$ . Soit  $h$  un tel élément; on a

$$Af = f; \quad Bf = B Af = 0; \quad Bg = g; \quad Ag = ABg = 0$$

puis

$$(A + B)(f + g) = Af + Bf + Ag + Bg = f + g; \quad (A + B)h = h$$

Ceci prouve que la multiplicité  $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$  est le domaine des valeurs de l'opérateur  $A + B$ , cette multiplicité est donc fermée, et on peut écrire

$$P_{\mathfrak{M}} + P_{\mathfrak{N}} = P_{\mathfrak{M} + \mathfrak{N}}$$

**Théorème 9.** Les opérateurs de projection sont bornés.

La relation  $f = P_{\mathfrak{M}}f + h$ , où  $h$  est orthogonal à  $P_{\mathfrak{M}}f$  donne en effet

$$\|f\|^2 = \|P_{\mathfrak{M}}f\|^2 + \|h\|^2$$

et

$$\|P_{\mathfrak{M}}f\| \leq \|f\|$$

**Théorème 10.**  $A_1, A_2, \dots, A_k$  étant des opérateurs de projection, la condition nécessaire et suffisante pour que  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$  soit un opérateur de projection est que tous les opérateurs  $A_i A_j$  ( $i \neq j$ ) soient nuls. Il est aussi nécessaire et suffisant pour cela que l'on ait, quel que soit  $f$

$$\|A_1 f\|^2 + \|A_2 f\|^2 + \dots + \|A_k f\|^2 \leq \|f\|^2$$

8/9

Si  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$  est un opérateur de projection on a

$$\begin{aligned} \|A_1 f\|^2 + \dots + \|A_k f\|^2 &= (A_1 f, f) + (A_2 f, f) + \dots + (A_k f, f) \\ &= ([A_1 + A_2 + \dots + A_k]f, f) = \|(A_1 + \dots + A_k)f\|^2 \leq \|f\|^2 \end{aligned}$$

et la seconde condition est remplie ; si la seconde condition est remplie et si  $f$  est un élément tel que  $A_m f = f$ , on a ( $m \neq \ell$ )

$$\|f\|^2 + \|A_\ell f\|^2 = \|A_m f\|^2 + \|A_\ell f\|^2 \leq \|A_1 f\|^2 + \dots + \|A_k f\|^2 \leq \|f\|^2$$

et par suite  $A_\ell f = 0$ . Mais  $g$  étant un élément quelconque, on a  $A_m(A_m g) = A_m g$ , donc aussi  $A_\ell(A_m g) = 0$ , ce qui prouve que la première condition est remplie ; enfin, il est immédiat que si la première condition est remplie,  $A_1 + A_2 + \dots + A_k$  est un opérateur de projection.

**Définition 8.** Soient  $A = P_{\mathfrak{M}}$ ,  $B = P_{\mathfrak{N}}$  deux opérateurs de projection, supposons la multiplicité  $\mathfrak{M}$  contenue dans la multiplicité  $\mathfrak{N}$  ; on écrira

$$A \leq B$$

Ce signe a toutes les propriétés du signe « plus petit que ».

**Théorème 11.** Si, entre deux opérateurs de projection  $A$  et  $B$  on a la relation  $A \leq B$ , on a aussi, quel que soit  $f$

$$\|A f\| \leq \|B f\|$$

Il est clair en effet, que si  $A \leq B$ , on a  $A = AB$ , et par suite

$$\|A f\| \leq \|A[B f]\| \leq \|B f\|$$

9/10 d'après le théorème 9.

**c. – Les opérateurs continus – Le théorème d’Hellinger-Toeplitz – Les suites convergentes d’opérateurs.** On a défini dans une précédente conférence<sup>[7]</sup>, deux sortes de convergence dans l’espace de Hilbert. D’abord la convergence ordinaire, basée sur l’expression de la distance de deux éléments, et qui admet le critère de Cauchy ; puis une autre espèce de convergence, que nous dénommerons convergence faible, et qui est reliée à la forme des fonctionnelles linéaires continues : une suite d’éléments  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  converge faiblement vers l’élément  $f$  si, quel que soit l’élément  $g$ , la fonctionnelle linéaire  $(g, f_n)$  converge vers  $(g, f)$ . On a démontré à ce propos, les deux points suivants, qui sont essentiels :

- 1) Si la suite  $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$  est telle que, quel que soit l’élément  $g$ , la fonctionnelle linéaire  $(g, f_n)$  converge, cette suite converge faiblement vers un élément  $f$  ;
- 2) de plus, les éléments de la suite sont bornés en normes, dans leur ensemble.

Il résulte de là que la convergence faible admet un principe de choix, c’est à dire que de toute suite<sup>[8]</sup> d’éléments bornés en normes dans leur ensemble, on peut extraire une suite partielle faiblement convergente. C’est ce qu’on aperçoit immédiatement en prenant un système coordonné et en appliquant le procédé diagonal.

10/11

Tout ceci étant rappelé, considérons un opérateur borné et continu  $A$ . Prenons un système coordonné orthogonal et normal :

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

soit  $f$  un élément quelconque de l’espace, posons  $g = Af$  ; les fonctionnelles linéaires  $(g, \varphi_i)$  sont évidemment des fonctionnelles linéaires continues de l’élément  $f$  ; elles sont donc de la forme

$$(g, \varphi_i) = (f, \sigma_i)$$

Ces formules, une fois donnés les systèmes  $(\varphi_i)$  et  $(\sigma_i)$  définissent l’opérateur  $A$ . Le système  $(\sigma_i)$  n’est pas quelconque ; en particulier, il est nécessaire que, quel que soit l’élément  $f$ , la série

$$\sum_i |(f, \sigma_i)|^2$$

soit convergente. Nous donnerons le nom de système (L) à tout système d’une infinité d’éléments vérifiant cette condition ; (à noter qu’il en résulte que les éléments d’un tel système convergent faiblement vers 0). Inversement, donnons-nous un système (L) ;  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, \dots$  ; les formules

$$(g, \varphi_i) = (f, \sigma_i)$$

donnent évidemment le résultat de l’application d’un certain opérateur linéaire  $A$  à l’élément  $f$ . Cet opérateur est partout défini ; la question se pose de savoir s’il est continu ; la réponse, affirmative, est donnée par le *Théorème d’Hellinger-Toeplitz*.<sup>[9]</sup>



**Théorème 12.** *Quels que soient le système (L) et le système coordonné choisis, il existe un nombre positif  $M$  tel que l'on ait, pour tout élément  $f$*

$$\|Af\| \leq M \|f\|$$

Nous montrerons d'abord que l'opérateur  $A$  est faiblement continu. Considérons en effet un élément  $h$  de l'espace, et la fonctionnelle  $(h, g)$  qui est une fonctionnelle linéaire de  $f$ . Si  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  sont les coordonnées de l'élément  $h$  par rapport au système  $(\varphi_i)$ , les éléments

$$h_n = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_i$$

convergent vers  $h$ , et les produits scalaires  $(h_n, g)$  convergent vers  $(h, g)$ ; or,

$$(h_n, g) = \sum_{i=1}^n x_i (\varphi_i, g) = \sum_{i=1}^n x_i (\sigma_i, f) = (k_n, f)$$

avec

$$k_n = \sum_{i=1}^n x_i \sigma_i$$

quelque soit  $f$ ,  $(k_n, f)$  a une limite  $(h, g)$ ; les  $k_n$  convergent faiblement vers un élément  $k$ , et  $(h, g) = (k, f)$ .

Considérons maintenant une suite  $(f_i)$  convergeant faiblement vers  $f$ ;  $(k, f_i)$  converge vers  $(k, f)$ , et si l'on pose  $g_i = Af_i$ , on aura

$$(h, g_i) = (k, f_i)$$

et l'on voit que  $(h, g_i)$  a une limite  $(k, f)$  quel que soit  $h$ , d'où résulte que la suite  $g$  12/13 converge faiblement vers un élément  $g$  tel que

$$(h, g) = (k, f)$$

En particulier, pour  $h = \varphi_i$ , on a  $k = \sigma_i$ , on voit donc que  $g = A(f)$ . L'opérateur  $A$  est donc bien faiblement continu. Le raisonnement précédent met de plus en évidence un autre opérateur linéaire, celui qui fait correspondre l'élément  $k$  à l'élément  $h$ ; il est caractérisé par le fait que  $(h, Af) = (k, f)$ , et il a partout un sens, c'est donc l'opérateur  $A^*$  associé à  $A$ , dont nous avons, du même coup, montré l'existence et l'unicité. Il est facile de déterminer le système (L) correspondant à cet opérateur; il suffit, dans la formule précédente, de faire  $f = \varphi_i$ ; ce qui donne  $(k, \varphi_i) = (h, A\varphi_i)$  et le système

$$\rho_i = A\varphi_i$$

est le système (L) cherché. On verrait de même que  $\sigma_i = A^*\varphi_i$ , formules définissant le système (L) de l'opérateur  $A$ .

On peut remarquer que le système coordonné  $(\varphi_i)$  est un système (L) particulier; plus généralement, si  $(\alpha_i)$  est un système (L), les éléments

$$\beta_i = A\alpha_i$$

constituent aussi un nouveau système (L); c'est ce qu'on voit en remarquant que

$$(f, \beta_i) = (f, A\alpha_i) = (A^*f, \alpha_i)$$

La série  $\sum |(f, \beta_i)|^2$  est donc convergente; on peut énoncer le théorème :

13/14

**Théorème 13.** *Les opérateurs faiblement continus invarient les systèmes (L).*

Pour achever la démonstration du théorème de Hellinger-Toeplitz, il suffit de montrer qu'un opérateur faiblement continu est borné. En effet, dans le cas contraire, on portait trouver une suite d'éléments  $(f_i)$  bornés en normes dans leur ensemble, et telle que les éléments de la suite correspondante  $g_i = Af_i$  aient des normes indéfiniment croissantes. Or, de la suite  $(f_i)$ , on peut tirer, par le principe de Bolzano, une suite partielle faiblement convergente, la suite partielle correspondante tirée de la suite  $(g_i)$  convergerait faiblement, elle serait donc bornée en norme dans son ensemble, il y a contradiction. L'opérateur  $A$  est donc borné et continu. Sa norme  $M_A$  est la borne supérieure précise des normes de  $g = Af$  quand  $\|f\| = 1$ . c'est aussi la borne supérieure précise de  $|(g, Af)|$  quand  $\|f\| = \|g\| = 1$ ; mais comme  $(g, Af) = (A^*g, f)$  on voit que les opérateurs associés  $A$  et  $A^*$  ont la même borne :

$$M_A = M_{A^*}$$

Passons maintenant à l'étude des suites d'opérateurs.

1.- *Convergence faible d'une suite d'opérateurs.*

**Définition 9.** *Une suite d'opérateurs bornés  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  converge faiblement si, quel que soit l'élément  $f$ , la suite d'éléments  $g_n = A_n f$  est faiblement convergente.*

14/15

Soit  $g$  la limite faible de cette suite  $(g_n)$ ; on passe de  $f$  à  $g$  par l'application d'un certain opérateur que nous désignerons par  $A$ . Prenons un système coordonné orthogonal et normé  $(\varphi_i)$ , désignons par  $\sigma_{n,i}$  le système (L) définissant  $A_n$ . Quel que soit  $f$ , le produit scalaire

$$(g_n, \varphi_i) = (f, \sigma_{n,i})$$

a une limite  $(g, \varphi_i)$ ; la suite  $\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \dots, \sigma_{n,i}, \dots$  converge donc faiblement vers un élément  $\sigma_i$ ; on a de plus  $(g, \varphi_i) = (f, \sigma_i)$ , ce qui prouve que  $(\sigma_i)$  est un système (L) définissant l'opérateur borné  $A$ .

**Théorème 14.** *La suite faiblement convergente d'opérateurs  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  est bornée dans son ensemble, c'est à dire qu'il existe un nombre positif  $M$  tel que*

$$\|A_n f\| \leq M \|f\|$$

*quel que soit l'élément  $f$  et pour tout indice  $n$ .*

Dans le cas contraire, on portait tirer de la suite donnée une suite partielle  $A_{i_n}$  telle que les éléments

$$g_n = A_{i_n} f$$

aient des normes indéfiniment croissantes; or cela est contradictoire, puisque cette suite d'éléments doit être faiblement convergente.

On peut montrer aussi qu'il existe un principe de Bolzano pour la convergence <sup>15/16</sup> faible des suites d'opérateurs.

2.- *Convergence uniforme d'une suite d'opérateurs.*

**Définition 10.** Une suite d'opérateurs bornés  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$  converge uniformément vers l'opérateur borné  $A$  lorsque la borne  $M_{A-A_n}$  de l'opérateur  $A - A_n$  tend vers 0.

Il est clair alors, que, quel que soit l'élément  $f$ , la suite  $A_n f$  converge vers  $Af$ .

La convergence uniforme des suites d'opérateurs admet un critère de Cauchy :

**Théorème 15.** La condition nécessaire et suffisante pour que la suite  $A_n$  converge uniformément est que la borne  $M_{A_{n+p}-A_n}$  puisse être rendue aussi petite qu'on le veut en prenant  $n$  assez grand, quel que soit  $p$  positif.

C'est nécessaire car

$$M_{A_{n+p}-A_n} \leq M_{A-A_n} + M_{A-A_{n+p}}$$

comme on le voit par application de l'inégalité triangulaire. C'est suffisant; soit en effet  $(\sigma_{n,i})$  le système (L) de l'opérateur  $A_n$  relativement au système coordonné  $(\varphi_i)$ . L'inégalité

$$\|\sigma_{n+p,i} - \sigma_{n,i}\| = \|A_{n+p}^* \varphi_i - A_n^* \varphi_i\| \leq M_{A_{n+p}-A_n}$$

prouve que la suite  $\sigma_{1,i}, \sigma_{2,i}, \dots, \sigma_{n,i}, \dots$  converge vers un élément  $\sigma_i$ . L'inégalité

$$|M_{A_{n+p}} - M_{A_n}| \leq M_{A_{n+p}-A_n}$$

<sup>16/17</sup> conséquence aussi de l'inégalité triangulaire, prouve que les  $M_{A_n}$  ont une limite; ils sont donc bornés dans leur ensemble par un nombre positif  $M$ , et comme

$$\sum_{i=1}^{\infty} |(f, \sigma_{n,i})|^2 \leq M^2 \|f\|^2$$

on voit, en passant à la limite, que le système  $(\sigma_i)$  est aussi un système (L). Il définit un opérateur borné vers lequel les  $A_n$  tendent faiblement. Pour achever la démonstration, remarquons préalablement que, lorsqu'une suite d'opérateurs convergent [sic] faiblement vers l'opérateur  $A$ , et lorsque les  $M_{A_n}$  sont bornés dans leur ensemble par un nombre positif  $M$ , on a certainement  $M_A \leq M$ ; c'est ce que l'on constate sans peine en partant de l'inégalité

$$\sum_{i=1}^m |(f, \sigma_{n,i})|^2 \leq M^2 \|f\|^2$$

puis en faisant d'abord  $n$ , puis  $m$ , infinis. Appliquons ceci à la suite  $A_{n+p} - A_n$  qui pour  $p$  infini, converge faiblement vers  $A - A_n$ . Si  $n$  est pris d'autre part assez grand pour que

$$M_{A_{n+p}-A_n} \leq \varepsilon$$

on aura, d'après ce qui vient d'être dit  $M_{A-A_n} \leq \varepsilon$ , et la suite  $A_n$  converge uniformément vers l'opérateur  $A$ .

**Théorème 16.** *Si les suites d'opérateurs bornés  $A_n$  et  $B_n$  convergent uniformément vers les opérateurs bornés  $A$  et  $B$ , l'opérateur  $A_n B_n$  converge uniformément vers  $AB$ .*

On a en effet :

17/18

$$\begin{aligned} M_{AB-A_n B_n} &= M_{A(B-B_n)+(A-A_n)B_n} \leq M_{A(B-B_n)} + M_{(A-A_n)B_n} \\ &\leq M_A M_{B-B_n} + M_{A-A_n} M_{B_n} \end{aligned}$$

ce qui suffit à prouver notre assertion puisque  $M_{A-A_n}$  et  $M_{B-B_n}$  tendent vers 0.

On notera que ce théorème n'est pas exact pour la convergence faible des suites d'opérateurs.

*Remarque.* On envisage aussi une troisième espèce de convergence des suites d'opérateurs : la convergence forte, dont on obtient la définition en supprimant l'adverbe faiblement dans celle de la convergence faible. Cette troisième espèce de convergence est en quelque sorte intermédiaire entre les deux précédentes.

**d. — L'opérateur résolvant et le spectre.** Soit  $\lambda$  un paramètre arbitraire pouvant prendre des valeurs complexes. Dans la suite,  $A$  désignera un opérateur borné,  $E$  l'opérateur identique.

Nous considérerons l'opérateur  $E - \lambda A$  ; quand  $\lambda$  est nul, il se réduit à l'opérateur identique qui est son propre inverse. On peut se demander si, quand  $\lambda$  est suffisamment petit en module,  $E - \lambda A$  n'a pas un opérateur inverse  $X$  satisfaisant aux conditions

$$X(E - \lambda A) = (E - \lambda A)X = E$$

Considérons la série formelle d'opérateurs

18/19

$$X = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \dots + \lambda^n A^n + \dots$$

qui satisfait formellement aux équations précédentes. Je dis qu'elle est uniformément convergente pour  $|\lambda|$  assez petit. Soit en effet

$$X_n = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \dots + \lambda^n A^n.$$

Il est clair que la borne de l'opérateur  $\lambda^p A^p$  est inférieure à  $|\lambda|^p \cdot (M_A)^p$ , par suite

$$M_{X_{n+p}-X_n} \leq |\lambda|^{n+1} (M_A)^{n+1} + |\lambda|^{n+2} (M_A)^{n+2} + \dots + |\lambda|^{n+p} (M_A)^{n+p}$$

il apparaît que pour  $|\lambda| < \frac{1}{M_A}$ ,  $M_{X_{n+p}-X_n}$  peut être rendu aussi petit que l'on veut, quel que soit l'entier positif  $p$ , en prenant  $n$  assez grand. De plus, pour ces valeurs de  $\lambda$ , l'opérateur  $\lambda^n A^n$  converge uniformément vers l'opérateur nul, et comme

$$(E - \lambda A)X_n = X_n(E - \lambda A) = E - \lambda^{n+1}A^{n+1}$$

on voit que la limite uniforme  $X$  de la suite  $X_n$ , somme de la série uniformément convergente

$$X = E + \lambda A + \lambda^2 A^2 + \cdots + \lambda^n A^n + \cdots$$

est l'inverse de l'opérateur  $E - \lambda A$ .

**Définition 11.** On appelle spectre de l'opérateur  $A$ , l'ensemble des valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles l'inverse de  $E - \lambda A$  n'existe pas. Les autres valeurs de  $\lambda$  sont appelées valeurs ordinaires.

**Définition 12.**  $\lambda$  étant une valeur ordinaire du paramètre, on appelle opérateur résolvant de l'opérateur  $A$ , l'opérateur  $A_\lambda$ , évidemment borné et continu, défini par la relation

$$(E - \lambda A)^{-1} = E + \lambda A_\lambda$$

D'après ce qui précède, les valeurs de  $\lambda$  de module inférieur à  $1/M_A$  sont des valeurs ordinaires, et pour ces valeurs,  $A_\lambda$  est la somme de la série convergente

$$A_\lambda = A + \lambda A^2 + \lambda^2 A^3 + \cdots + \lambda^n A^{n+1} + \cdots$$

Équation fondamentale de l'opérateur résolvant.  $\lambda$  étant une valeur ordinaire, écrivons que

$$(E - \lambda A)(E + \lambda A_\lambda) = (E + \lambda A_\lambda)(E - \lambda A) = E$$

il vient

$$(1) \quad A_\lambda - A - \lambda A A_\lambda = A_\lambda - A - \lambda A_\lambda A = 0$$

Plus généralement, soient  $\lambda$  et  $\mu$  deux valeurs ordinaires ; on a

$$E - \lambda A = (E + \lambda A_\lambda)^{-1}, \quad E - \mu A = (E + \mu A_\mu)^{-1}$$

puis successivement

$$(\mu - \lambda)E = \mu(E + \lambda A_\lambda)^{-1} - \lambda(E + \mu A_\mu)^{-1}$$

$$(\mu - \lambda)(E + \lambda A_\lambda)(E + \mu A_\mu) = \mu(E + \mu A_\mu) - \lambda(E + \lambda A_\lambda)$$

qui donne en simplifiant et en supposant  $\lambda\mu \neq 0$

$$(2) \quad A_\lambda - A_\mu + (\mu - \lambda)A_\lambda A_\mu = 0$$

on peut aussi permuter  $\lambda$  et  $\mu$ , on a donc aussi

$$(2) \quad A_\mu - A_\lambda + (\lambda - \mu)A_\mu A_\lambda = 0$$

Les opérateurs résolvants  $A_\lambda$  et  $A_\mu$  sont donc permutables. Quand  $\lambda\mu = 0$  on retrouve les relations (1); les relations (2) sont donc générales; elles ont des conséquences importantes :

20/21

**Théorème 17.** *L'opérateur résolvant est une fonction continue de  $\lambda$ , c'est à dire que si une suite de valeurs ordinaires  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  converge vers  $\lambda$  et si les  $M_{A_{\lambda_n}}$  sont [bornés]<sup>[10]</sup> dans leur ensemble,  $\lambda$  est aussi une valeur ordinaire.*

On a, en effet, d'après (2)

$$M_{A_{\lambda_m} - A_{\lambda_n}} \leq |\lambda_m - \lambda_n| M_{A_{\lambda_m}} M_{A_{\lambda_n}} \leq |\lambda_m - \lambda_n| M^2,$$

puisque  $M_{A_{\lambda_m}} \leq M$ . L'opérateur  $A_{\lambda_n}$  tend donc uniformément vers un opérateur borné  $B$ . L'opérateur  $E - \lambda_n A_n$  tend uniformément vers  $E + \lambda B$ . Les produits  $(E + \lambda_n A_{\lambda_n})(E - \lambda_n A)$  et  $(E - \lambda_n A)(E + \lambda_n A_{\lambda_n})$  tendent uniformément vers  $(E + \lambda B)(E - \lambda A)$  et  $(E - \lambda A)(E + \lambda B)$ , mais les termes de ces deux dernières suites sont égaux à  $E$ ; on a donc

$$B = A_\lambda$$

**Théorème 18.** *La borne  $M_{A_\lambda}$  de l'opérateur résolvant  $A_\lambda$  est une fonction continue de  $\lambda$ .*

Une conséquence de la relation (2) est en effet

$$|M_{A_\lambda} - M_{A_\mu}| \leq |\lambda - \mu| M_{A_\lambda} M_{A_\mu}$$

On en déduit, si  $M_{A_\lambda} \neq 0$ , ainsi que  $M_{A_\mu}$

$$\left| \frac{1}{M_{A_\lambda}} - \frac{1}{M_{A_\mu}} \right| \leq |\lambda - \mu|$$

ce qui prouve l'assertion. D'ailleurs l'hypothèse  $M_{A_\lambda} \neq 0$  équivaut à  $A_\lambda \neq 0$ , et cela [sic] est bien réalisé, sans quoi, d'après (1),  $A$  serait aussi nul.

21/22

**Théorème 19.** *L'ensemble des valeurs ordinaires de  $\lambda$  est un ensemble ouvert.*

Plus précisément, si  $\lambda$  est ordinaire, et si  $|\lambda - \mu| < \frac{1}{M_{A_\lambda}}$ ,  $\mu$  est aussi ordinaire.

Pour le voir, il suffit d'écrire, compte tenu de la relation (1)

$$\begin{aligned} E - \mu A &= E - \lambda A - (\mu - \lambda)A = E - \lambda A - (\mu - \lambda)(E - \lambda A)(E + \lambda A_\lambda)A \\ &= (E - \lambda A)(E - [\mu - \lambda]A_\lambda) \end{aligned}$$

et les deux facteurs du second membre ont un inverse. On a donc

$$E + \mu A_\mu = (E - [\mu - \lambda]A_\lambda)^{-1}(E + \lambda A_\lambda)$$

D'ailleurs

$$(E - [\mu - \lambda]A_\lambda)^{-1} = E + (\mu - \lambda)A_\lambda + (\mu - \lambda)^2 A_\lambda^2 + \dots + (\mu - \lambda)^n A_\lambda^n + \dots$$

et tout calcul fait, il reste

$$A_\mu = A_\lambda + (\mu - \lambda)A_\lambda^2 + \dots + (\mu - \lambda)^n A_\lambda^{n+1} + \dots$$

On peut dire que l'opérateur résolvant considéré comme fonction du paramètre  $\lambda$  admet pour dérivées successives

$$1!A_\lambda^2, 2!A_\lambda^3, \dots, n!A_\lambda^{n+1}, \dots$$

Ce dernier résultat conduit à regarder  $A_\lambda$  comme une fonction analytique de  $\lambda$  et à lui appliquer l'appareil de Cauchy.

**Bibliographie.** RIESZ.— Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.

v.NEUMANN.— Math.Grundlagen der Quantenmechanik Eigenwerttheorie Hermitescher Operatoren ; math. Ann. Bd.102

Mémorial des Sciences mathématiques, fasc.LVII.<sup>[11]</sup>

### Notes

1. Les références bibliographiques des travaux utilisés dans cet exposé sont [HT27] (pour le théorème de Hellinger-Toeplitz), et, comme indiqué dans la bibliographie finale, l'article [vN29] et le livre [vN32] de von Neumann, le livre [Rie13] de Riesz et le fascicule [Del32] de Delsarte lui-même.
2. Différentes versions de la première page de cet exposé sont présentées pages 54, 55 et 56.
3. Ce qui est décrit est ce que l'on appelait à l'époque une transformation « univoque », c'est-à-dire, en termes modernes, une application. Sur cette terminologie, voir les notes de l'exposé 1-A.
4. La notation  $A^\times$  va se transformer, au cours de ce même exposé, en  $A^*$ .
5. Après Bourbaki, on n'ajoutera plus ce « aussi petit que soit  $\varepsilon$  », « pour être vraiment sûr », après le « à tout nombre  $\varepsilon$  positif ».
6. Ici une main a ajouté au crayon l'adjectif « linéaire » sur l'exemplaire de l'IHP.
7. La conférence précédente.
8. Ici, une main a ajouté au crayon l'adjectif « infinie » dans l'exemplaire de l'IHP.
9. Le plus simple est de renvoyer à leur article de l'*Encyclopédie* [HT27].
10. L'ajout manuscrit au crayon « bornés » était indispensable.
11. **Des archives de Bourbaki.** Le jour où Delsarte donna cet exposé, à midi, s'étaient réunis Weil, Delsarte, Cartan, Dieudonné, de Possel, Chevalley, pour la première fois, autour du projet dit « du traité d'analyse », c'est-à-dire, comme André Weil l'exposa :

Fixer pour 25 ans les matières du Certificat de Calcul différentiel et intégral en rédigeant en commun un traité d'analyse.

La discussion avait porté sur les questions que nous avons vues se poser autour des exposés du séminaire : algèbre ou pas ? abstraite ? Voir le document `delta_0001.pdf` des archives Bourbaki.

## Des archives du séminaire...

### Compte-rendu de la séance du 10 Décembre 1934

1. La séance est ouverte à 16h.35 par [Delsarte, biffé] M.JULIA qui [fait, biffé] donne la parole à Delsarte.

2. De 16h.35 à 18h.55<sup>(1)</sup> Delsarte continue l'exposé de la théorie de l'espace de Hilbert par l'étude des transformations de cet espace.

3. M.Julia remercie vivement Delsarte de sa conférence. M.Fréchet fait quelques remarques sur l'historique de Weil<sup>(2)</sup> puis sur la manière d'introduire l'espace de Hilbert de manière axiomatique par un produit scalaire. Une discussion s'engage sur des questions de terminologie en particulier sur les [mots, biffé] locutions compacts et compacts en soi.

4. Thé. Conversations. La séance est levée à 18h.15<sup>(3)</sup>.

---

Ajoutons (voir la note 24 page 39 de la première partie), même si cela n'apparaît évidemment dans aucune archive, que *le Petit Parisien* consacrait ce jour-là un article à Gaston Julia, homme du jour, en première page.

## Références

- [Del32] J. DELSARTE – *Les groupes de transformations linéaires de l'espace de Hilbert*, Mémorial des sciences mathématiques, vol. 57, Gauthier-Villars, 1932.
- [HT27] E. HELLINGER & O. TOEPLITZ – *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten*, 184 S. Mit einem Vorwort von E. Hilb. Leipzig, B. G. Teubner (Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften mit Einschluß ihrer Anwendungen, II C 13) , 1927.
- [Rie13] F. RIESZ – *Les systèmes d'équations linéaires à une infinie d'inconnues.*, Collection de monographies sur la théorie des fonctions, Gauthier-Villars, Paris, 1913.
- [vN29] J. VON NEUMANN – « Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren », *Math. Ann.* **102** (1929), p. 49–131.
- [vN32] ———, *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Springer, Berlin, 1932.

---

1. Probablement 17h.55 d'après la fin.

2. Sans doute Weil n'avait-il pas présenté oralement l'historique qui commence la version écrite de l'exposé 2-B, et ce serait la raison pour laquelle Fréchet serait intervenu sur ce point seulement ce jour-là.

3. Une page ronéotée. Archives de l'IHP.