LE SÉMINAIRE DE MATHÉMATIQUES 1933–1939

édition réalisée et annotée par
Michèle Audin

1. Année 1933-1934
Théorie des groupes et des algèbres

Claude Chevalley

L'arithmétique dans une algèbre simple

Séminaire de mathématiques (1933-1934), Exposé 1-J, 6 p.

<http://books.cedram.org/MALSM/SMA_1933-1934__1__J_0.pdf>

Séminaire de mathématiques 30 avril 1934
Exposé 1-J, p. 1 à 6

L'ARITHMÉTIQUE DANS UNE ALGÈBRE SIMPLE

par **Claude Chevalley**

L'arithmétique dans une algèbre simple (suite)

Notations. On désignera[1] par k un corps qui sera un corps de nombres algébriques ou un corps de nombres $\mathfrak{p}$-adiques, par $\mathfrak{S}$ une algèbre simple de centre k, qui sera algèbre complète de matrices sur un corps gauche $\mathfrak{K}$. On désignera pas $\mathfrak{n}$ l'anneau des entiers de k.

I.– Ordres maxima. On cherche à définir dans $\mathfrak{S}$ une notion d'entier. La première idée consiste à appeler *entiers* les éléments de $\mathfrak{S}$ qui satisfont dans k à une équation à coefficients entiers, dont le premier coefficient soit 1. Mais on trouve qu'en général ces éléments ne forment pas un anneau. On est alors conduit à utiliser la notion d'ordre maximum, introduite par Weil dans le précédent exposé.

D'une manière générale, on appelle *ordre* de $\mathfrak{S}$ un anneau $\mathcal{O}$, contenu dans $\mathfrak{S}$, contenant $\mathfrak{n}$, qui est $\mathfrak{n}$-module fini, et qui satisfait à la condition $k\mathcal{O} = \mathfrak{S}$. La troisième condition peut se traduire de la manière suivante : soit $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ une k-base minima de $\mathfrak{S}$: les éléments de $\mathfrak{S}$ étant mis sous la forme $\sum_1^N \alpha_i u_i$ $(\alpha_i \subset k)$, il doit exister un entier δ de k tel que, pour tous les éléments de $\mathcal{O}$, les produits $\delta\alpha_i$ soient 1/2
entiers. La dernière condition signifie que tout élément de $\mathfrak{S}$ peut être mené dans $\mathcal{O}$ en le multipliant par un élément convenable de $\mathfrak{n}$.

On appelle *ordre maximum* (o.m.) un ordre qui n'est contenu dans aucun autre ordre.

Il est clair que si $\mathcal{O}$ est un ordre maximum, et φ un élément régulier de $\mathfrak{S}$, $\varphi^{-1}\mathcal{O}\varphi$ est encore un ordre maximum. Dans le cas où k est un corps $\mathfrak{p}$-adique et où $\mathfrak{S} = \mathfrak{K}$, il n'y a, comme on l'a vu, qu'un o.m.[2] Dans tous les autres cas, il y en une infinité.

On appelle (Artin) *idéal à gauche* (ou à droite) par rapport à un o.m. $\mathcal{O}$ un $\mathcal{O}$-module à gauche (ou à droite) fini contenu dans $\mathfrak{S}$, et contenant des éléments de $\mathfrak{n}$.

Nous démontrerons les propriétés suivantes des idéaux :

Si $\mathfrak{a}$ est un $\mathcal{O}$-idéal à gauche, l'ensemble des éléments α de $\mathfrak{S}$ tels que $\alpha\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ est un ordre maximum $\mathcal{O}'$, en général $\neq \mathcal{O}$.

$\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ s'appellent ordre à gauche et à droite de $\mathfrak{a}$.

Un idéal $\mathfrak{a}$ possède un inverse, c'est à dire qu'il existe un idéal $\mathfrak{a}^{-1}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathcal{O}$, $\mathfrak{a}^{-1}\mathfrak{a} = \mathcal{O}'$, $\mathfrak{a}^{-1}$ est l'ensemble des éléments β de $\mathfrak{S}$ tels que $\beta\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}'$, $\mathfrak{a}\beta \subset \mathcal{O}$.

2/3 On remarquera que si un ordre $\mathcal{O}$ est tel que tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche $\mathfrak{a}$ possède un inverse $\mathfrak{a}^{-1}$ tel que $\mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1} = \mathcal{O}$, $\mathcal{O}$ est maximum. En effet, si $\mathcal{O}'$ est un ordre contenant $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ est $\mathcal{O}$-idéal à gauche, et $\mathcal{O}' = \mathcal{O}'^2$. En multipliant par $\mathcal{O}'^{-1}$ il vient $\mathcal{O}' = \mathcal{O}$.

Un idéal $\mathfrak{a}$ est entier quand son inverse contient 1, c'est à dire encore quand il est contenu dans ses ordres à droite et à gauche. Un o.m. $\mathcal{O}$ étant $\mathfrak{n}$-module fini satisfait au Teilerkettensatz pour les idéaux entiers à gauche (ou à droite).[3] Il en résulte que tout idéal entier $\mathfrak{a} \neq \mathcal{O}$ est divisible par un idéal entier maximum $\mathcal{P}_1$ (c'est à dire qui n'est divisible par aucun autre idéal $\neq \mathcal{O}$) ou *irréductible.* Si $\mathfrak{a}\mathcal{P}_1^{-1} \neq \mathcal{O}$, cet idéal qui est entier est encore divisible par un idéal irréductible $\mathcal{P}_2$, etc... On en déduit, en vertu du Teilerkettensatz, que :

Tout $\mathcal{O}$-idéal à gauche entier se décompose en produit de facteurs irréductibles.

Cette décomposition n'est d'ailleurs pas unique.

II.– Cas des corps $\mathfrak{p}$-adiques. Pour établir les propositions précédentes, nous prendrons d'abord le cas où k est un corps de nombres $\mathfrak{p}$-adiques.

Nous introduirons un module de représentation $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{K}$; ce sera le module des formes linéaires à n variables $u_1, u_2, \ldots, u_n$, à coefficients dans $\mathfrak{K}$: $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ est $\mathfrak{S}$-
3/4 module droit, et toute base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$ conduit à une représentation, qui associe à l'élément φ de $\mathfrak{S}$ la matrice $(\alpha_{i,j})$ définie par

$$v_i\varphi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} v_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Réciproquement, étant donnés n éléments $w_1, w_2, \ldots, w_n$ de $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$, il y a un élément φ de $\mathfrak{S}$ et un seul tel que $v_i\varphi = w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nous désignerons par $\mathfrak{o}$ l'ordre maximum de $\mathfrak{K}$, et nous considérerons les divers $\mathfrak{o}$-modules finis $\mathfrak{N}$ de rang n contenus dans $\mathfrak{M}_{\mathfrak{K}}$. Pour chacun d'eux, nous introduirons l'anneau $\widehat{\mathcal{O}}$ des éléments φ tels que $\mathfrak{N}\varphi \subset \mathfrak{N}\widehat{\mathcal{O}}$ est un anneau qui contient $\mathfrak{n}$, et qui satisfait à $k\widehat{\mathcal{O}} = \mathfrak{S}$. D'autre part, $\mathfrak{o}$ étant un anneau à idéaux tous principaux,[4] $\mathfrak{N}$ possède par rapport à $\mathfrak{o}$ une base minima $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ et s'écrit :

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{o}v_1 \oplus \mathfrak{o}v_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{o}v_n$$

On voit alors que les éléments de $\widehat{\mathcal{O}}$ sont ceux qui, dans la représentation définie par la base $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ se représentent par des matrices à coefficients entiers. Il en résulte que $\widehat{\mathcal{O}}$ est $\mathfrak{o}$-module fini, donc aussi $\mathfrak{n}$-module fini, et est un ordre.

Soit $\mathfrak{A}$ un $\widehat{\mathcal{O}}$-idéal à gauche. On constate tout de suite que $\mathfrak{N}\mathfrak{A}$ est un module $\mathfrak{N}'$ qui satisfait aux mêmes conditions que $\mathfrak{N}$. Donc $\mathfrak{N}'$ se met sous la forme

$$\mathfrak{N}' = \mathfrak{o}v_1' \oplus \mathfrak{o}v_2' \oplus \cdots \oplus \mathfrak{o}v_n'$$

Soit φ l'élément de $\mathfrak{S}$ défini par les formules $v_i\varphi = v_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Il est clair que 4/5
$\mathfrak{N}\varphi = \mathfrak{N}'$. Je dis que $\varphi \subset \mathfrak{A}$.

1) On a $v_i\widehat{\mathcal{O}} = \mathfrak{N}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. En effet, soit u un élément quelconque de $\mathfrak{N}$. L'élément ψ de $\mathfrak{S}$ défini par $v_i\psi = u$, $v_j\psi = 0$ (si $j \neq i$) est dans $\widehat{\mathcal{O}}$; donc $v_i\widehat{\mathcal{O}} \supset \mathfrak{N}$. Comme d'autre part, $\mathfrak{N}\widehat{\mathcal{O}} \subset \mathfrak{N}$, la formule est démontrée.
2) On en déduit $v_i\mathfrak{A} = \mathfrak{N}'$. Donc, pour chaque i, $\mathfrak{A}$ contient un élément ψ_i tel que $v_i\psi_i = v_i'$. Soit θ_i l'élément de $\widehat{\mathcal{O}}$ défini par $v_i\theta_i = v_i$, $v_j = 0$ $(j \neq i)$. L'élément $\sum \theta_i\psi_i$ est dans $\mathfrak{A}$, et on a $v_i(\sum \theta_i\psi_i) = v_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Cet élément est donc égal à φ.

Donc $\mathfrak{A}\varphi^{-1} \supset \widehat{\mathcal{O}}$. Mais $\mathfrak{N}\mathfrak{A}\varphi^{-1} = \mathfrak{N}'\varphi^{-1} = \mathfrak{N}$, donc $\mathfrak{A}\varphi^{-1} \subset \widehat{\mathcal{O}}$. On en déduit $\mathfrak{A} = \widehat{\mathcal{O}}\varphi$: $\mathfrak{A}$ est un idéal principal.

L'ensemble des éléments ψ tels que $\mathfrak{A}\psi \subset \widehat{\mathcal{O}}$ est évidemment $\varphi^{-1}\widehat{\mathcal{O}}$, et on a $\mathfrak{A} \cdot \varphi^{-1}\widehat{\mathcal{O}} = \widehat{\mathcal{O}}$. Donc $\mathfrak{A}$ possède un inverse : il en résulte, comme nous avons vu, que $\widehat{\mathcal{O}}$ est un o.m. L'ordre à droite de $\mathfrak{A} = \widehat{\mathcal{O}}\varphi$ est évidemment $\varphi^{-1}\widehat{\mathcal{O}}\varphi$, qui est un o.m., car la transformation par φ produit un automorphisme intérieur de $\mathfrak{S}$. Nous avons démontré dans le cas considéré les propositions annoncées. Nous avons vu de plus que tout idéal est principal, et qu'un o.m. est l'ensemble des éléments de $\mathfrak{S}$ qui, dans une 5/6
certaine représentation de $\mathfrak{S}$ dans $\mathfrak{K}$ se représentent par des matrices à coefficients entiers.

Cherchons maintenant les idéaux bilatères. Reprenant les notations de plus haut, il est clair que l'ordre à droite de $\mathfrak{A}$ est l'ensemble des éléments θ de $\mathfrak{S}$ tels que $\mathfrak{N}'\theta \subset \mathfrak{N}'$. Si $\mathfrak{A}$ est bilatère, cet ensemble est $\mathcal{O}$. On a alors $v_1\mathcal{O} = \mathfrak{N}$, $v_1'\mathcal{O} = \mathfrak{N}'$. Dans ceci, v_1' n'est assujetti qu'à être un des éléments d'une base minima de $\mathfrak{N}'$. Or, soit $\mathfrak{a}$ l'ensemble des éléments α de $\mathfrak{o}$ tels que $\alpha v_1 \subset \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{a}$ est un idéal par rapport à $\mathfrak{o}$, et se met par suite sous la forme $\mathfrak{o}\alpha_1$. On a vu, dans l'exposé sur les modules, que $\mathfrak{o}\alpha v_1$ est un sous-module primitif de $\mathfrak{N}'$, et ue par suite, αv_1 peut être pris pour premier élément d'une base minima de $\mathfrak{N}'$. Donc $\alpha v_1\mathcal{O} = \mathfrak{N}' = \alpha\mathfrak{N}$. On peut écrire aussi, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}\alpha$ ce qui montre que $\mathfrak{A} = \mathcal{O}\mathfrak{a}$. Donc :

Les idéaux bilatères par rapport à $\widehat{\mathcal{O}}$ sont les $\mathfrak{p}^m\widehat{\mathcal{O}}$ où $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier de $\mathfrak{K}$.

III.– Cas du corps de nombres algébriques. Dans ce cas, la méthode introduite par Hasse, qui s'est montrée extrêmement féconde, consiste à considérer successivement ce qui se passe dans tous les corps $k_\mathfrak{p}$ relatifs aux divers idéaux premiers[5] $\mathfrak{p}$ de k.

Pour chaque $\mathfrak{p}$, nous introduirons $k_\mathfrak{p}\mathfrak{S}$ qui est une algèbre simple $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ de centre $k_\mathfrak{p}$. 6/7
Les éléments de $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ peuvent être considérés comme limites de suites d'éléments de

$\mathfrak{S}$, dans le sens suivant : soit $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ une k-base de $\mathfrak{S}$. Une suite $\sum \alpha_i^{(m)} u_i$ d'éléments de $\mathfrak{S}$ convergera pour $\mathfrak{p}$ si, pour chaque i, les $\alpha_i^{(m)}$ forment une suite convergente, dont la limite est α_i. La limite de la suite sera alors par définition l'élément $\sum \alpha_i u_i$ de $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ (on vérifie tout de suite que cette notion de limite est indépendante de la base choisie). E étant un ensemble d'éléments de $\mathfrak{S}$, on désignera par $E_\mathfrak{p}$ l'ensemble des suites d'éléments de E.

Théorème fondamental de passage. *Soit $\mathfrak{M}$ un $\mathfrak{n}$-module fini tel que $k\mathfrak{M} = \mathfrak{S} \cdot \mathfrak{M}$ est la partie commune à $\mathfrak{S}$ et à tous les $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$. Si $\mathfrak{N}$ est un autre module du même type que $\mathfrak{M}$, on a pour presque tous les $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{N}_\mathfrak{p}$. Enfin, si on se donne pour chaque $\mathfrak{p}$ un $\mathfrak{n}_\mathfrak{p}$-module fini, $\widehat{\mathfrak{N}}_\mathfrak{p}$, tel que $k_\mathfrak{p}\widehat{\mathfrak{N}}_\mathfrak{p} = \mathfrak{S}_\mathfrak{p}$, de manière à ce que, pour presque tous les $\mathfrak{p}$, on ait $\widehat{\mathfrak{N}}_\mathfrak{p} = \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$, l'intersection avec $\mathfrak{S}$ de tous les $\mathfrak{N}_\mathfrak{p}$ est un module $\mathfrak{N}$ tel que, pour tous les $\mathfrak{p}$, on ait $\mathfrak{N}_\mathfrak{p} = \widehat{\mathfrak{N}}_\mathfrak{p}$.*

1) Pour la première partie, il suffit de montrer que si φ est un élément de $\mathfrak{S}$ contenu dans tous les $\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$, φ est dans $\mathfrak{M}$. Soit $(u_1, u_2, \dots, u_N)$ une k-base minima de
7/8 $\mathfrak{S}$, et $\varphi = \sum \alpha_i u_i$ $(\alpha_i \subset k)$. Si nous mettons les éléments de $\mathfrak{M}$ sous la forme $\sum \beta_i u_i$, β_N décrit un idéal $\mathfrak{a}_N$ de $\mathfrak{n}$. L'hypothèse $\varphi \subset \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$ entraîne $\alpha_N \subset (\mathfrak{a}_N)_\mathfrak{p}$ quel que soit $\mathfrak{p}$. On a donc $\alpha_N \subset \mathfrak{a}_N$ et par suite il y a un élément φ_N de $\mathfrak{M}$ dans lequel le dernier coefficient est α_N. On a $\varphi - \varphi_N = \sum_1^{N-1} \alpha'_i u_i$ et $\varphi - \varphi_E \subset \mathfrak{M}_\mathfrak{p}$, quel que soit $\mathfrak{p}$. On en conclut, comme plus haut, qu'il y a un élément φ_{N-1} de $\mathfrak{M}$ de la forme
$$\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_{N-2} u_{N-2} + \alpha'_{N-1} u_{N-1}.$$
On forme $\varphi - \varphi_{N-1} - \varphi_{N-2}$ et on continue de la même manière. Finalement, φ se met sous la forme d'une somme $\varphi_1 + \varphi_2 + \cdots + \varphi_N$ d'éléments de $\mathfrak{M}$, ce qui démontre la proposition.

2) Prenons des bases $(v_1, v_2, \dots, v_R)$ de $\mathfrak{M}$ et $(w_1, w_2, \dots, w_S)$ de $\mathfrak{N}$. Il existe deux éléments α, β de $\mathfrak{n}$ tels que :
   1) $\alpha v_1, \alpha v_2, \dots, \alpha v_R$ soient dans $\mathfrak{N}$.
   2) $\beta w_1, \beta w_2, \dots, \beta w_S$ soient dans $\mathfrak{M}$.

   Supposons $\mathfrak{p}$ premier à $\alpha\beta$. Alors $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} \subset \alpha^{-1}\mathfrak{N}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{N}_\mathfrak{p} \subset \beta^{-1}\mathfrak{M}_\mathfrak{p}$. Mais α^{-1}, β^{-1} sont dans $\mathfrak{n}_\mathfrak{p}$. On a donc $\mathfrak{M}_\mathfrak{p} = \mathfrak{N}_\mathfrak{p}$.

3) Prenons un élément $\sum \alpha_i u_i$ de $\widehat{\mathfrak{N}}_\mathfrak{p}$. Pour chaque m on a des décompositions $\alpha_i = \overline{\alpha}_i^{(m)} u_i + \Pi^m \beta_i$, $\overline{\alpha}_i^{(m)} \subset k$, $\beta_i \subset \mathfrak{n}_\mathfrak{p}$. ($\Pi$ représente un élément de $\mathfrak{n}$ divisible par $\mathfrak{p}$). Il existe un entier m_0 tel que si $m > m_0$, les $\Pi^m u_i$ soient dans $\widehat{\mathfrak{N}}_\mathfrak{p}$. On
8/9 a alors $\varphi = \lim \overline{\varphi}_m$, où $\overline{\varphi}_m = \sum \alpha_i^{(m)} u_i$ est un élément de $\mathfrak{S}$ qui est dans $\mathfrak{N}_\mathfrak{p}$ si $m > m_0$. Il existe d'autre part pour chaque m un entier δ_m de $\mathfrak{n}$ tel que $\delta_m \varphi_m$ soit dans $\mathfrak{M}$.

Mettons δ_m sous la forme $\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{a}$, $(\mathfrak{a},\mathfrak{p}) = 1$. Alors si $\mathfrak{g}$ est un idéal premier $\neq \mathfrak{p}$, il y a un entier δ'_m divisible par $\mathfrak{a}$ et premier à $\mathfrak{p}$, $\delta'_m\varphi_m$ est dans $\widehat{\mathfrak{N}}_\mathfrak{p}$ et dans $\mathfrak{M}_\mathfrak{g}$, si $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{p}$, donc aussi dans presque tous les $\mathfrak{N}_\mathfrak{g}$; prenons un entier $\chi_\mathfrak{g}$ premier à $\mathfrak{p}$ tel que $\chi_\mathfrak{g}\delta'_m\varphi_m$ soit dans $\mathfrak{N}_\mathfrak{g}$. Alors[6]

$$\prod_\mathfrak{g} \chi_\mathfrak{g} \cdot \delta'_m\varphi_m = \delta''_m\varphi_m \text{ est dans } \mathfrak{N},$$

et δ''_m est premier à $\mathfrak{p}$. Donc φ_m est dans $\mathfrak{N}_\mathfrak{p}$. Comme $\varphi = \lim \varphi_m$, φ est aussi dans $\mathfrak{N}_\mathfrak{p}$.

Conséquences. Admettons l'existence dans $\mathfrak{S}$ d'un o.m. $\mathcal{O}$. Alors, pour chaque $\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ est o.m. de $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$. En effet, si pour un $\mathfrak{p}$, $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ était contenu dans un autre ordre $\mathcal{O}'_\mathfrak{p}$, l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec tous les $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ $(\mathfrak{g} \neq \mathfrak{p})$ et avec $\mathcal{O}'_\mathfrak{p}$ serait un ordre $\mathcal{O}'$ contenant $\mathcal{O}$ et $\neq \mathcal{O}$, ce qui est impossible.

Soit $\mathfrak{A}$ un idéal à gauche par rapport à $\mathcal{O}$. Les ensembles des éléments α, α', tels que $\alpha\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}\alpha' \subset \mathfrak{A}$ sont respectivement les intersections de $\mathfrak{S}$ avec tous les $\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ et avec tous les ordres à droite $\mathcal{O}'_\mathfrak{p}$ des idéaux $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$. Le premier ensemble est $\mathcal{O}$; le second est un $\mathfrak{n}$-module fini de même rang que $\mathcal{O}$: c'est un ordre $\mathcal{O}'$ qui est maximum puisque chaque $\mathcal{O}'_\mathfrak{p}$ est maximum. De même l'ensemble des éléments β de $\mathfrak{S}$ tels que $\mathfrak{A}\beta \subset \mathcal{O}$ est l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec tous les $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}^{-1}$. C'est évidemment un $\mathcal{O}$-idéal à droite $\mathfrak{A}^{-1}$; 9/10
des formules : $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}\mathfrak{A}_\mathfrak{p}^{-1} = \mathcal{O}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}^{-1}\mathfrak{A}_\mathfrak{p} = \mathcal{O}'_\mathfrak{p}$, on déduit $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathcal{O}$, $\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathcal{O}'$. Les théorèmes fondamentaux sur les idéaux sont donc établis.

Étant donnés un idéal $\mathfrak{A}$ dont l'ordre à gauche est $\mathcal{O}$ et un idéal premier $\mathfrak{p}$ de k, on désigne encore par $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ l'idéal de $\mathfrak{S}$ formé de l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec tous les $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ $(\mathfrak{g} \neq \mathfrak{p})$ et avec $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$. C'est un idéal qui a même ordre à gauche $\mathcal{O}$ que $\mathfrak{A}$, et qui n'est différent de $\mathcal{O}$ que pour un nombre fini de $\mathfrak{p}$. $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ s'appelle composante de $\mathfrak{A}$ suivant $\mathfrak{p}$. On a, si $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{p}$, $(\mathfrak{A}_\mathfrak{p})_\mathfrak{g} = \mathcal{O}_\mathfrak{g}$.

Supposons maintenant $\mathfrak{A}$ bilatère, et formons le produit $\mathfrak{A}' = \prod \mathfrak{A}_\mathfrak{p}$, le produit étant étendu à tous les idéaux $\mathfrak{p}$ rangés dans un ordre quelconque. Alors, on a, pour chaque $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{A}'_\mathfrak{p} = \mathfrak{A}_\mathfrak{p}$, d'où $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$: *un idéal bilatère est le produit de toutes ses composantes.*

D'autre part, $\mathfrak{A}$ étant toujours bilatère, on a vu que $\mathfrak{A}_\mathfrak{p}$ est de la forme $\mathfrak{p}^{\star m_\mathfrak{p}}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, où $\mathfrak{p}$ est l'idéal premier du corps gauche $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}^\star$ sur lequel $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ est algèbre de matrices. Ce corps gauche est contenu dans $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$, et par suite on peut écrire $\mathfrak{A}_\mathfrak{p} = \overline{\mathfrak{p}}^{m_\mathfrak{p}}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$, où $\overline{\mathfrak{p}}$ est l'idéal bilatère maximum (ou premier) de $\mathfrak{K}_\mathfrak{p}$. On désigne encore par $\overline{\mathcal{P}}$ l'intersection de $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ avec l'idéal $\overline{\mathfrak{p}}\mathcal{O}_\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$ at avec tous les $\mathcal{O}_\mathfrak{g}$ $(\mathfrak{g} \neq \mathfrak{p})$. C'est l'idéal bilatère premier 10/11
de $\mathfrak{K}$. On a $\mathfrak{A}_\mathfrak{p} = \mathcal{P}^{m_\mathfrak{p}}$. Il résulte de là que :

tout idéal bilatère se décompose en produit d'idéaux bilatères premiers ; le produit de deux idéaux bilatères relatifs à un même o.m. est commutatif et par suite la décomposition en idéaux premiers est unique à l'ordre près des facteurs. Tout idéal bilatère relatif à l'o.m. $\mathcal{O}$ de $\mathfrak{S}$ est de la forme $\mathfrak{a}\mathcal{O}$, où $\mathfrak{a}$ est un idéal de $\mathfrak{K}$. Pour chaque idéal *premier $\mathfrak{p}$ de k, il y a un idéal premier bilatère $\mathcal{P}$ de $\mathfrak{S}$, et on a $\mathfrak{p} = \mathcal{P}^{e_\mathfrak{p}}$ où $e_\mathfrak{p}$ est le degré du corps gauche semblable à $\mathfrak{S}_\mathfrak{p}$.*

Notes

1. Il n'y a pas de référence explicite dans le texte. Clairement l'article [Has31] et la thèse de l'auteur (soutenue le 20 janvier de cette année) [Che33] doivent être cités.
2. C'est dans l'exposé précédent (1-I) que cela a été vu : les entiers d'un corps gauche $\mathfrak{p}$-adique forment son unique ordre maximum.
3. *Teilerkettensatz* = condition de chaînes ascendantes, voir l'exposé 1-B.
4. Le théorème sur les modules de type fini sur les anneaux principaux a été exposé par Chevalley lui-même (exposé 1-B).
5. C'est ce qu'on appelle aujourd'hui une étude locale.
6. Ce passage est un exemple dans lequel les trous non remplis de l'exemplaire de l'IRMA ont été complétés grâce à l'exemplaire de l'IHP.

Des archives du séminaire...

Compte-rendu de la séance du 30 Avril [1934]

1. À 16h.30 M.Julia donne la parole à Chevalley qui fait un exposé sur « l'Arithmétique dans une algèbre simple ».
2. Fin de l'exposé à 17h.30. M.Julia remercie vivement Chevalley qui a donné dans son exposé quelques démonstrations originales.
3. Thé. Conversations. On étudie le programme de l'année prochaine. La séance est levée à 18h.30 [(1)].

Références

[Che33] C. Chevalley – « Sur la théorie du corps de classes dans les corps finis et les corps locaux. », *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I* **2** (1933), p. 365–476.

[Has31] H. Hasse – « Über $\mathfrak{p}$-adische Schiefkörper und ihre Bedeutung für die Arithmetik hyperkomplexer Zahlsysteme », *Math. Ann.* **104** (1931), p. 495–534.

1. Une page ronéotée. Archives de l'IHP.